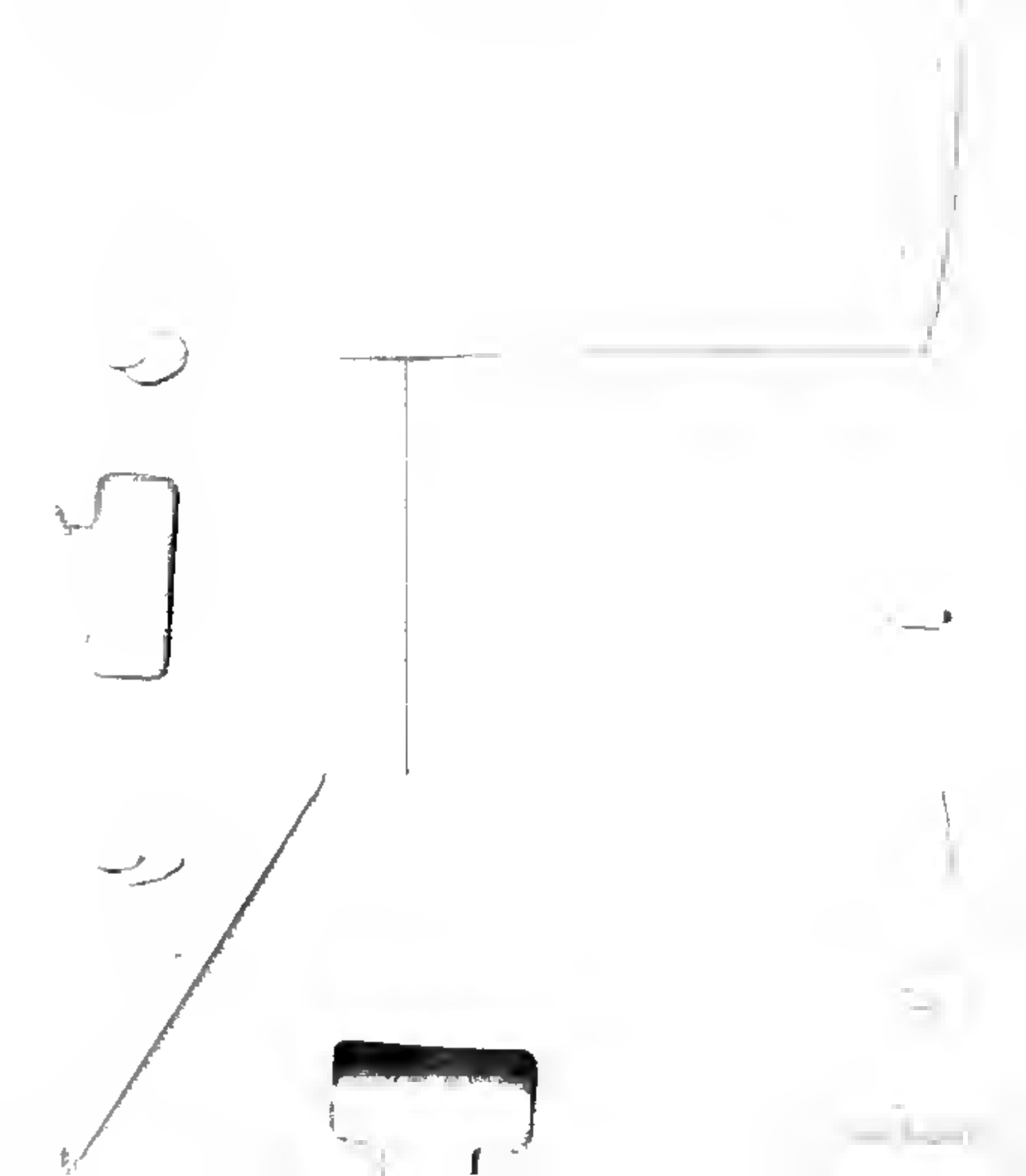
SERENISSIMI BURGUNDIAE DUCIS ELEMENTA GEOMETRICA EX GALLICO SERMONE IN LATINUM TRANSLATA...

Nicolas Malezieu, Louis, Guisnee



5 3.239

SERENISSIMI

BURGUNDIÆ DUCIS ELEMENTA GEOMETRICA

Ex Gallico ſermone in Latinum translata

AD USUM SEMINARII PATAVINI.

Acceſſere Quatuor Propoſitiones ad Trigonometriam apprime utiles.

Inſuper Introductio ad Algebræ applicationem ad Geometriam,

AUCTORE GUISNEO,

Nunc primùm latinè reddita.

PATAVII, *Ex Typographia Seminarii*, MDCCXIII.
Apud Joannem Manfrè.
Superiorum Permiſſu, & Privilegio.

ADOLESCENTIBUS

Seminarii Patavini Alumnis

PRÆFECTUS STUDIORUM.

CUm mihi primùm Studiorum veſtrorum cura demandata eſt, Adoleſcentes optimi, in eo ſtatim contendi ut me vobis probarem, quod ab Eminentiſſimo Principe noſtro ſæpe propoſitum, atque adeo imperatum, varias tamen ſemper modò rei, modò temporis difficultates offenderat. Id ſcilicet reſtat unum ad rem litterariam hoc in loco conſtituendam, ut ſuis cuique Scholæ libri ad Seminarii uſum comparentur, & pro noſtra docendi conſuetudine interpretatione, ſcholiſque, ubi opus ſit, illuſtrentur. Ecce quò mea in univerſum ſpectat induſtria, quò Geometricæ hujus Inſtitutionis vobis præbendæ conſilium. Juvat porro inde initium ducere, unde ſapientiſſimus Plato jubebat, cujus Academiæ foribus inſcriptum fuiſſe accepimus: ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. In quo verendum non erit, ne magis gloriæ noſtræ, quàm veſtræ utilitatis rationem habere videamur, qui novum Inſtitutum ab ea litterarum parte auſpicamur, cui tam bene ab aliis conſultum eſt, ut aliena potius, quàm noſtra, vobis tradenda judicemus. Quod ſi non ubique idem eveniet, cogemurque in Rhetoricis præſertim ſtudiis aliquando proferre noſtra; ingenuè, ſanctèque recipimus, facturos nos quàm modeſtiſſimè, veritatis amore, non novitatis. Etſi enim tam multæ ſunt in veterum Scriptorum monumenta Exercitationes, Notæ, Spicilegia,

Commentarii, ut non dicam legentium, ſed cogitantium animi penè obruantur; nonnihil tamen adhuc addendum videtur, plurima verò detrahenda, ſaltem ut ad Scholarum noſtrarum morem ſingula accommodentur. Interim Elementa hæc æqui bonique conſulite, in quæ nihil eſt a nobis collatum operæ, niſi ut, Gallica cùm eſſent, Latinè verterentur. Ceterùm quatuor illas Propoſitiones, quas ad Trigonometriam apprime utiles addendas curavimus, ornatiſſimo Viro Jacobo Hermanno publico Mathefeos hac in Urbe Profeſſori debetis, qui tanta eſt in nos, ac Muſas noſtras benevolentia, quanto ad res omnes Mathematicas pertractandas ingenio. Valete, & inſtitutam optimarum Artium viam ſtrenuè conſicite.

PRÆ-

PRÆFATIO
GALLICA
Latinè reddita.

ELementa hæc Geometrica, ut ex ipſo Burgundiæ Ducis autographo deſcripta ſunt, ita ad eundem, tanquam ad auctorem, referri poſſunt.

Menſe Novembri 1696 Principem hunc annorum circiter quatuordecim Malezievio Dombenſi Quæſtori Rex tradidit in diſciplinam, ut Mathematicis ſtudiis inſtitueretur.

Erat quidem Malezievius multis jamdiu graviſſimis rebus, totiuſque Sereniſſimi Principis noſtri familiæ negotiis implicatus: Rex tamen id quoque oneris illi imponendum ratus ad Matheſim docendam vocavit. Indolem illam Adoleſcentis, tantamque ingenii vim effetentis ſe ſupra ætatem, ſupraque hominum fidem magiſtrum poſcere non vulgarem. Si quis præter Malezievium pat eſſet ſpei tantæ excipiendæ, ac eximia inſtitutione firmandæ, non ſe virum occupatiſſimum fuiſſe electurum, cui Regiam ſobolem commendaret.

Iraque Malezievius Kal. Decembris Regis jussu ludum aperuit: nec multo post quicum sibi res esset, satis cognovit. Velox enim, ac expeditum Principis ingenium in ipsis difficultatibus exultabat, nullaque retardatum mora plura sæpe propositis intelligebat. Sed quia non ratò eveniebat, ut nimio excurrendi studio ardua non superaret, sed declinaret; cepit Malezievii consilio veterem lectionem manu sua scribere, antequam novam aggrederetur: ut ipse sibi omnia subjiciens, ac rerum Geometricarum ordinem sedulò meditans, iter tam salebrosum minùs celeriter, ac tutiùs obiret. Res planè voto respondit. Intra semestrem, & eo minus adeo profecit, ut subtiliter, ac dilucidè de rebus difficillimis disputaret. Quod quidem ex hoc libro penè ex tempore fuso non erit difficile judicare.

Stilus sanè non ubique elegans: & quoniam Princeps sibi scribebat uni, ita est sæpe in Demonstrationibus brevis, ac pressus, ut multis non sufficere ad explicationem videatur. Sed præterquamquod non eo consilio hæc scripta sunt, ut a domestica umbra exirent, illud insuper accedit, quòd ea, de quibus est ratiocinandum, nunquam simpliciùs justo proposita videri possunt: quantoque se offerunt difficiliora, tantò sunt strictiùs, ac breviùs ponenda.

Cognovimus ex Malezievio per annos fermè quatuor ita se Burgundiæ Ducem his studiis abdidisse, ut ægro quotidie animo exiret e schola,

la, lætiſſimo ingrederetur. Eximia illa mentis acies, ac mira ingenii maturitas ex Mathematico pulvere, quemadmodum ſperare juvat, ad majora aliquando tranſibit, totamque ſe in commune bonum effundet, cùm ingentem Regni hujus clavum tenebit, ad quem Superùm providentia vocatur.

Horum Elementorum ratio non valde differt ab Arnauldi Elementis. Ceteris, quæ adhuc in lucem prodierunt, diligenter conſideratis, hæc demum prætulit Malezievius, quorum ordo ad naturæ ordinem accedere maximè videtur. Si quis ea velit æquè perpendere, & cum aliis comparare, fatebitur non invitus multò quidem eſſe, quàm Euclidis Elementa fecundiora, longè percipi facilius, memoria denique firmiùs retineri. Non erit laboris, opinor, pœnitendi examen hoc ejus viri ductu inſtituiſſe, cui in Mathematicis ſtudiis tantum deferunt hujus ſcientiæ peritiſſimi, ut eum de rebus abditiſſimis tanquam oraculum identidem conſulant. Itaque cùm Vir hac in re præſtantiſſimus hæc potiſſimùm Elementa delegerit, quæ tanti Regni heredi traderet, qui ſe Mathematicis ſtudiis dediderunt, non eſt cur dubitent idem iter inſtituere.

Ex Elementis Arnauldi quædam detracta ſunt minùs utilia, quædam illis addita ferme neceſſaria. Paucis quibuſdam Propoſitionibus *Solidorum* Elementa explicantur: pertingitur inde uſque ad *Trigonometriam*, & ad principia, quibus *Sinuum Tabulæ* conſtruuntur, quæ revera ad Elementa

refe-

referenda ſunt. Denique curatum eſt diligentiſſimè, ne quid eorum omitteretur, quæ ad ea cognoſcenda ducunt, quibus humanum ingenium nihil aſſequitur præſtantius, ac ſublimius; quibuſque Artes, ac Scientiæ omnes ad honeſtum vitæ cultum inventæ tanquam fundamentis innituntur.

NOI

NOI REFFORMATORI
Dello Studio di Padoa.

HAvendo veduto per la Fede di Reviſione, & Approbatione del P. *F. Ambroſio Leſorti Inquiſitore di Padoa*, nel Libro intitolato: *Sereniſſimi Burgundiæ Ducis Elementa Geometrica, ex Gallico ſermone in latinum translata*, non v' eſſer cos' alcuna contro la Santa Fede Cattolica, & parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Prencipi, & buoni coſtumi, concedemo Licenza à *Zuanne Manfrè Stampatore*, che poſſi eſſer ſtampato, oſſervando gl' ordini in materia di Stampe, & preſentando le ſolite copie alle Publiche Librarie di Venetia, & di Padoa.

Dat. 3. Settembre 1712.

Girolamo Venier Kav. Proc. Reff.
Marin Zorzi Reff.
Gio: Franceſco Moroſini Cav. Reff.

Agoſtino Gadaldini Segr.

INDEX
RERUM,
Quæ hoc Opere continentur.

Definitiones, & Poſtulata. pag. 1
Axiomata, ſeu Veritates per ſe notæ. 3
Compendium Arithmeticæ per litteras. 4

LIBER I.

De Perpendicularibus, & Obliquis. 9
Ex dato puncto perpendicularem ducere ſupra datam lineam. ibid.
Ex dato puncto in data linea perpendicularem excitare. 10
Datam lineam in duas æquales partes dividere. ibid.
Ex dato extra lineam puncto unica tantùm perpendicularis ſupra datam lineam cadere poteſt; & hæc perpendicularis eſt breviſſima omnium aliarum linearum, quæ ab illo puncto ducuntur. 11
Duæ lineæ rectæ eidem lineæ perpendiculariter inſiſtentes nunquam concurrere poſſunt. ibid.
Lineæ obliquæ ab eodem puncto ductæ, eò longiores ſunt, quò magis diſtant a perpendiculari. 12
Ex tribus, quæ inter ſe comparari poſſunt, ſcilicet perpendiculari, obliqua, & diſtantia perpendiculi, ſi duo ſunt æqualia, etiam tertium æquale erit. ibid.
Si duabus lineis obliquis inæqualibus inter ſe, & ad diverſas partes ductis ab uno puncto ad datam lineam, duæ

duæ aliæ inæquales inter ſe ab alio puncto ad aliam lineam ductæ æquentur ſingulæ ſingulis, & diſtantiæ punctorum ſectionis duarum primarum æquetur diſtantiæ punctorum ſectionis duarum poſtremarum, puncta, a quibus ducuntur, æquè diſtant a linea, ad quam illæ ductæ ſunt. 13

L I B E R II.

De Parallelis. 14
Si aliqua linea perpendiculariter inſiſtat datæ lineæ, obliquè verò alteri lineæ datæ, quævis alia linea, quæ ſit perpendicularis ad primam datarum, erit obliqua ad ſecundam, & omnium perpendicularium breviſſima erit illa, quæ propior eſt inclinationi datarum linearum. ibid.
Si una linea perpendiculariter inſiſtat uni datæ lineæ, obliquè verò alteri, & alia linea ducta ex aliquo puncto primæ datarum verſus partem inclinationis perpendicularis ſit ad ſecundam datarum, hæc ultima perpendicularis brevior erit, quàm prima linea, quæ unius perpendicularis eſt, alteri verò obliqua. 15
Si eadem linea ad duas datas lineas perpendicularis ſit, quævis alia linea, quæ ſit perpendicularis ad unam datarum, erit quoque perpendicularis ad alteram. ibid.
Per datum punctum ad datam lineam parallelam ducere. 16
Æquè inclinatæ lineæ inter parallelas ſunt æquales, portiones parallelarum, quas illæ ſecant, æquantur; & iſtæ æquè inclinatæ ſunt ipſæ quoque parallelæ. 17

L I B E R III.

De lineis circumferentia terminatis. 18
Linea, quæ chordam ſecat, trei poteſt habere conditiones,

nes, secare chordam perpendiculariter, secare bifariam, & transire per centrum circuli; duæ ex his conditionibus datis dant tertiam. ibid.

Per tria quæcunque data puncta, dummodo non ad unam rectam posita, circumferentiam describere. 19

Perpendicularis, quæ chordam bifariam secat, secat quoque bifariam arcus majorem, & minorem, quos illa chorda subtendit. 20

Si ab extremitate alterutrius radiorum, qui arcum continent, ducatur perpendicularis alteri radio, hæc appellatur sinus arcus; & si hujusmodi perpendicularis producatur usque ad peripheriam, fiet chorda arcus, qui est duplus arcus dati. 21

In eodem circulo, aut in circulis æqualibus sinus æquales dant arcus æquales, & arcus æquales dant sinus æquales. ibid.

Si plures circumferentiæ sint concentricæ, radii a majori terminati abscindent a reliquis circumferentiis arcus habentes singulos eandem rationem ad suam peripheriam. 22

Omnium secantium externarum brevissima est, quæ producta per centrum transiret. ibid.

Omnium externarum secantium maxima est, quæ per centrum transit. 23

Omnium internarum secantium maxima est, quæ per centrum transit. ibid.

Omnium internarum secantium minima est, quæ producta per centrum transiret. ibid.

Omnis linea extremitati radii perpendicularis, non nisi punctualiter circulum tangit. 24

Fieri nullo modo potest, ut vel unica linea recta inter circulum, & tangentem transeat, licèt infinitæ circulares transire possint, quæ non nisi in puncto contactus concurrant. ibid.

Ex

R E R U M

Ex aliquo extra circulum dato puncto duas tangentes ducere, & ostendere, illas inter se æquari. 25
Super infiniti natura Meditatio. 26

L I B E R IV.

De Angulis. Definitiones. 28
Anguli ad verticem oppositi sunt æquales. 29
Plures lineæ ab uno puncto terminatæ continent omnes simul quatuor angulos rectos. 30
Si duo anguli habeant & radium, & sinum æquales, sunt æquales inter se. ibid.
Anguli alterni sunt æquales. 31
Quivis angulus una cum duobus angulis, quos cum basi efficiunt ejus latera, æquatur duobus rectis. ibid.
Angulus externus par est duobus internis oppositis. 32
Si aliqua linea plures secet parallelas, eadem omnes obliquitate secabit. 33
Si comparentur duo anguli isosceles, tres æqualitates possunt considerari, æqualitas laterum, æqualitas angulorum, & æqualitas basium; datæ duæ ex his æqualitatibus, dant tertiam. ibid.
Si duo æquales anguli habeant latera æqualia singula singulis, etiam basis basi æqualis erit. 34

L I B E R V.

De modo mensurandi angulos, quorum vertex non est in centro circuli. 35
Definitiones. ibid.
Anguli minoris segmenti mensura est semissis arcus, quem chorda subtendit. ibid.
Anguli inscripti mensura est semissis arcus, cui ille insistit. 36
Anguli, qui a chorda, & a portione alterius chordæ extra

circulum productę efficitur, mensura est semissis duorum arcuum, quos duę illę chordę subtendunt. 38

Omnis angulus, cujus vertex est intra centrum, & circumferentiam, mensuram habet semissem arcus, cui insistit, plus semisse illius arcus, qui ab ejus lateribus productis continetur. ibid.

Angulus, cujus vertex est extra circulum, mensuram habet semissem arcus concavi, minus semisse arcus convexi. ibid.

Si supra circuli diametrum productam plures ducantur perpendiculares, quas alia linea obliqua ducta ab extremitate diametri opposita parti productę secet, hęc efficiet angulos, quorum singuli habebunt mensuram semissem arcus ab obliqua subtensi. 39

Anguli circumscripti mensura est dimidia peripheria, minus arcu intra duas tangentes comprehenso. ibid.

LIBER VI.

De Proportionibus. Definitiones. 40

Quid sit Ratio. ibid.

Quid sit ratio numeri ad numerum, seu surda. 41

Quid sit Proportio, quid sint media, & quid extrema. 42

In omnibus proportionibus mediorum productum producto extremorum æquatur. 43

Demonstratio hujus proprietatis a Serenissima Cenomanensi Duce inventa. 44

Quid sit Alternando, Componendo, Dividendo, Invertendo, Permutando. 45

Quid sit ratio composita. 47

Ratię duplicata rationis numeri ad numerum habet exponentes numeros quadratos. 48

Æque inclinatę in duobus spatiis parallelis terminatis sunt inter se in eadem ratione, qua perpendiculares horum spatiorum. 49

RERUM.

Si duæ lineæ sint eodem modo inclinatæ in suo spatio parallelo, quo duæ aliæ sunt in suo; hæ quatuor lineæ sunt proportionales. 50

Si idem angulus duas habeat bases parallelas, ejus latera secundum unam basim sunt proportionalia ejus lateribus secundum aliam; & bases ipsæ sunt inter se in eadem ratione, qua latera homologa. 51

Explicatio partium æqualium circini proportionalis. ibid.

Explicatio Baculi Jacob. 52

Cùm duo anguli æquales habent singuli suam basim, & anguli ad bases facti a lateribus sunt singuli æquales, dicti anguli vocantur similes, & latera unius sunt proportionalia lateribus alterius: idem basibus accidit. ibid.

Datis tribus lineis invenire quartam proportionalem. 53

Si duorum angulorum inter parallelas existentium basibus duæ novæ bases primis parallelæ ducantur, hæ secundæ bases sunt primis proportionales. ibid.

Datis duobus circulis inæqualibus, si in majori accipiantur duæ chordæ subtendentes singulæ eundem graduum numerum, quem subtendunt duæ aliæ chordæ singulæ in minori, hæ quatuor chordæ sunt proportionales. 54

Explicatio chordarum circini proportionalis. ibid.

Si linea dividens angulum quemcunque bifariam tendat super basim, dividet basim lateribus proportionaliter. 55

Si a vertice anguli recti ducatur perpendicularis ad basim, hæc perpendicularis efficit duos angulos totis, & inter se similes, hinc que plures magni usus proportiones habentur. 56

Inter duas datas lineas invenire mediam proportionalem. 57

LIBER VII.

De Reciprocis. Definitiones. 58

Si producta indefinitè diameter alicujus circuli secetur ali-

qua perpendiculari, sive hæc circulum secet, sive tangat, sive extra circulum cadat, & ab extremitate diametri oppositæ extremitati productæ ducantur duæ quæcunque lineæ vel peripheriæ, vel perpendiculari terminatæ, & ab alterutra sectæ, erunt quævis tota, & ejus pars, qua a puncto, unde ductæ sunt, sumenda est, reciprocæ alteri toti, & ejus parti. 59

Si duo anguli ad verticem oppositi habeant bases antiparallelas, habebuntur lineæ reciprocæ. 61

Si duæ chordæ se in circulo secant, se secant reciprocè. ibid.

Si ex puncto extra circulum sumpto ducantur duæ lineæ ad concavam peripheriam, quævis tota, & ejus pars extra circulum sunt reciprocæ alteri toti, & ejus parti extra circulum. 62

Si alterutra harum duarum linearum extra circulum ductarum est tangens, hæc erit media proportionalis inter aliam totam, & ejus partem extra circulum. ibid.

Longitudinem diametri terræ sine astronomicæ observationis ope cognoscere. 63

Datam lineam extrema, & media ratione dividere. ibid.

Dato latere anguli isoscelis, qui futurus sit 36 graduum, ejus basim invenire. 64

LIBER VIII.

De Figuris. Definitiones. 65

Omnis figura rectilinea in tot resolvi potest triangula, quot habet latera. 66

Omnes anguli cujusvis polygoni æquantur bis tot angulis rectis, demptis quatuor, quot sunt latera polygoni. 67

In duabus figuris similibus quibuscunque perimeter est ad perimetrum, ut latus unius ad alterius latus homologum. ibid.

Quævis figura regularis circulo inscribi, & circumscribi potest. ibid.

In omnibus figuris regularibus inter se comparatis radius re-

ctus

Ejus eſt ad radium rectum, ut radius ad radium, latus ad latum, & perimeter ad perimetrum. 68
Circumferentiæ ſunt inter ſe, ut ipſarum radii. ibid.
Explicatio principii fundamentalis Staticæ. ibid.
Determinare angulum ad centrum, angulum figuræ, & angulum, quem radius cum latere cujuſvis polygoni efficit. 70
Circulo inſcribere, & circumſcribere omnem figuram regularem. 71
In omni triangulo major angulus majori latere ſubtenditur, & majus latus majorem angulum ſubtendit. 72
In omni triangulo ita eſt ſinus anguli ad latus, quod illi angulo opponitur, ut ſinus alterius anguli ad latus, quod illi opponitur. ibid.
Si pentagoni circulo inſcripti duo contigua latera jungat chorda, quæ ſecetur ab alia chorda conjungente alterutrum eorum laterum cum proxima latere, hæ duæ chordæ ita ſe ſecant, ut majus ſegmentum pentagoni lateri æquetur. 73
Area rectanguli habetur, ſi unum ejus latus per aliud multiplicetur. 74
Omne parallelogrammum æquale eſt rectangulo ejuſdem cum illo & baſi, & altitudinis. ibid.
Omne parallelogrammum dividi poteſt in duo trigona omnino æqualia. 76
Triangula verticem inter eaſdem parallelas, & baſim communem habentia, ſunt æqualia. ibid.
In omni triangulo rectangulo quadratum hypotenuſæ par eſt quadratis duorum reliquorum laterum. ibid.
Si linea quævis dividatur utcunque in duas partes, & inter totam, & ſingulas partes inveniantur duæ mediæ proportionales, quadratum totius æquabitur quadratis duarum illarum mediarum proportionalium. 77
Latera decagoni, pentagoni, & hexagoni eodem circulo inſcripta poſſunt ſemper in triangulum rectangulum diſponi. 78

Dato

Dato circulo pentagonum latus, inscribere. 80

Quadratum baseos cujusvis anguli obtusi excedit duo quadrata reliquorum laterum bis rectangulo, quod fit sub illo latere, ad quod ducitur perpendicularis, & sub parte ejusdem lateris productè intercepta inter perpendiculatem, & verticem anguli obtusi. ibid.

Quadratum baseos cujusvis anguli acuti superatur a duobus quadratis reliquorum laterum bis rectangulo, quod fit sub illo latere, ad quod ducitur perpendicularis, & sub parte ejusdem lateris contenta intra perpendicularem, & dati anguli verticem. 81

Aream trianguli, cujus tria tantùm latera sint cognita, invenire. 82

Si singuli anguli trianguli dividantur bifariam lineis supra latera opposita cadentibus, hæ tres lineæ dividentes in eodem puncto sibi occurrent. 83

Si a tribus triangulo oxigonii angulis demittantur perpendiculares ad latera opposita, hæ in eodem puncto sibi occurrent. 84

Si linea dividatur utcunque in duas partes, quadratum totius par est quadratis partium, plus bis rectangulo sub partibus contento. ibid.

Omnis figura regularis æquatur rectangulo, cujus basis est semissis perimetri, altitudo verò radius rectus figuræ. 85

Area circuli par est rectangulo basim habenti semissem peripheriæ, altitudinem verò radium. 86

Figuram certo laterum numero constantem in aliam ejusdem areæ transmutare, eamque, si placet, in triangulum reducere. 87

LIBER IX.

De comparatione areæ Figurarum. 88

Rectangula eandem basim habentia sunt inter se ut eorum alti-

altitudinis, & habentia tandem altitudinem sunt inter se ut baſes. ibid.
Rectangula sunt inter se in ratione compoſita baſeos ad baſim, & altitudinis ad altitudinem. 89
Rectangula similia sunt in ratione duplicata suarum baſium, seu altitudinum. ibid.
Circuli sunt inter se in ratione duplicata suorum radiorum. 90
Si super tribus lateribus trianguli rectanguli describantur tres figuræ similes, ea, quæ descripta erit super hypotenusa, æquabitur duabus aliis. 91
Dimensio Lunularum. ibid.
Diagonalis quadrati est incommensurabilis ejus lateri. 92
Considerationes de Incommensurabilibus. 93

LIBER X.

De Solidis. Definitiones. 96
Pyramides ejusdem & baseos, & altitudinis sunt æquales. 98
Omne Prisma triangulare divisi potest in tres pyramides æquales. 99
Conus est tertia pars cylindri, ejusdem cum illo & baseos, & altitudinis. 100
Soliditas Hemisphærii æquatur duabus tertiis cylindri ejusdem baseos, & altitudinis. ibid.
Superficies Hemisphærii par est superficiei cylindri ejusdem baseos, & altitudinis. 102
Sphæræ superficies est quadrupla areæ maximi ejusdem sphæræ circuli. 103
Dimensiones portionum sphæræ. 104
Dimensio superficiei portionum sphæræ. 105
De solidorum comparatione. 106
Ratio compoſita ex tribus rationibus, & ratio triplicata. ibid.
Corpora similia sunt inter se in ratione triplicata suarum dimensionum homologarum. 107

Sphæræ sunt inter se in ratione triplicata suorum radiorum. 109
Solidorum demonstratio per Geometriam Indivisibilium. 110
Fusum parabolicum est semissis cylindri eandem basim, & altitudinem habentis. 114
Methodus Patris Guldini pro centro gravitatis. 120

TRIGONOMETRIA.

Qui in uno triangulo duos angulos, & unum latus, vel duo latera, & unum angulum cognoscit, reliqua omnia cognoscit. 122
Datis tribus trianguli lateribus, invenire tres angulos. 124
Lacus superficiem metiri. ibid.
Distantiam turris inaccessibilis metiri. 125
Longitudinem tractus muri inaccessibilis mensurare. ibid.
Putei aqua carentis profunditatem dimetiri. 126
Nubis in aere existentis altitudinem metiri. ibid.
Distantiam Terræ a Luna mensurare. 127
Terræ a Sole intercapedinem determinare. 128
Distantiam Terræ a Jove dimetiri. 129
Sinuum Tangentium, & Secantium tabulam construere. 133
De sinu recto cujusvis arcus compositi. 136
De sinu complementi cujusvis arcus compositi. ibid.
De Tangentibus arcuum compositorum quotcumcunque. 137
De Secantibus arcuum compositorum quotcumcunque. 138
NONNULLA *Problemata Arithmetica, & Geometrica ope Speciosæ soluta, ut ejus utilitas, & facilitas in problematibus solvendis præ methodo ordinaria innotescat.* 139
INTRODUCTIO *ad Algebræ applicationem ad Geometriam.* 1. & seqq.

FINIS.

5 3 -79

INTRODUCTIO
AD
ALGEBRÆ
APPLICATIONEM
AD
GEOMETRIAM.
EX
GUISNEO.

DEFINITIONES.

1 ALgebra eſt ars, quæ alphabeticis litteris eaſdem facit operationes, quæ numeris fiunt, hoc eſt, additionem, ſubductionem, multiplicationem, diviſionem, & radicum extractionem.

Adhibentur autem potius alphabeti litteræ, quàm alii characteres arbitrarii, qui peræquè adhiberi potuiſſent, tum quia cognoſcuntur, & majori facilitate præ aliis characteribus ſcribuntur, tum quia cùm hæ litteræ nihil per ſe ſignificent, traduci poſſunt ad quodlibuerit exprimendum.

Cur verò non eadem ex characteribus arithmeticis, & numeris, quæ ex litteris in Algebræ ad omnes ſuos uſus applicatione, proveniat utilitas, illud eſt, 1. quòd peractâ per litteras aliqua ex illis, quas innuimus, operationibus, non ſolùm cognoſcitur id, quod reſultat, verum etiam cognoſcuntur, & diſtinguuntur eodem tempore omnes quantitates in tali producto contentæ, quod quidem in producto eiſdem per numeros operationibus facto non evenit. 2. quòd quantitates incognitæ inter calculos æquè commodè interſeruntur, ac cognitæ, quòdque eadem tam iſtis, quàm illis operamur facilitate. 3. quòd demonſtrationes, quæ calculis algebricis fiunt, generales ſunt, cùm contra in numeris nil niſi per inductionem probari poſſit.

Circa hæc tria potiſſimum attenditur magna illa utilitas, quæ ex calculo algebrico in ejus applicatione ad ſingulas matheſeos partes deducitur, quòd nempe demonſtrantur omnia Theoremata, quodque ſolvuntur omnia Problemata tam facilè, quàm difficulter demonſtrarentur, & ſolverentur, ſi eadem juxta Antiquorum methodum forent præſtanda.

Uſu jam receptum eſt, ut adhibeantur primæ alphabeti litteræ a, b, c, d, &c. ad quantitates cognitas, ultimæ vero $m, n, o, p, q, r, s, t, u, x, y, z$ ad incognitas exprimendas.

Præter litteras in Algebra adhibitas, dantur etiam nonnulla ſigna ad hoc inventa, ut notentur operationes, quæ ſuper iſdem litteris fiunt. Hoc ſignum $+$ ſignificat *plus*, & eſt nota Additionis; ſic $a+b$ indicat, b additum eſſe ipſi a. Hoc $-$ ſignificat *minus*, eſtque nota Subductionis; ſic $a-b$ indicat, b ſubductum eſſe ex a. Hoc $\times$ ſignificat *in*, vel *per*, atque eſt

nota Multiplicationis, ſic $a \times b$ indicat, a, & b unum per aliud eſſe multiplicatum

Hoc tamen ſignum ſæpiſſimè negligitur; uſu enim receptum eſt, ut quotieſcunque duæ, aut plures litteræ ſimul conjunctæ ſunt, nullo interpoſito ſigno, quod hujuſmodi litteras, vel quantitates per illas expreſſas ſeparet, illæ inter ſe multiplicatæ intelligantur, ſic v. c. ab indicat, a, & b inter ſe ducta eſſe: nihilominus ſemper hoc ſignum adhibetur, quotieſcunque indicandum eſt, duas quantitates majuſculis alphabeticis litteris repreſentatas ſimul multiplicatas eſſe, ſic $AB \times CD$, indicat, magnitudinem per AB expreſſam ductam eſſe in magnitudinem per CD ſignificatam. Ad alia inſuper ſigni multiplicationis uſus extenditur, de quibus in ſequentibus.

Hoc ſignum $=$ ſignificat *æquale*, indicatque, dari æqualitatem inter magnitudines, quæ illud præcedunt, & quæ ſequuntur. Sic $a = b$ indicat, a eſſe æquale ipſi b.

Hoc $>$ ſignificat *majus*: ſic $a > b$ indicat a majus eſſe ipſo b. Hoc $<$ ſignificat *minus*: ſic $a < b$ indicat, a minus eſſe ipſo b. Hoc ∞ ſignificat *infinitum*: ſic $x = \infty$ indicat, x eſſe quantitatem infinite magnam.

2. Alphabeticè litteræ dicuntur *quantitates algebricæ*, cùm adhibentur ad exprimendas magnitudines, ſuper quibus operari volumus.

3. Quantitates algebricè appellantur *ſimplices*, *incomplexæ*, ſeu *monomiæ*, cùm ſignis $+$, & $-$ non ſunt ſimul connexæ. Sic a: ab, $\frac{aa}{3}$, &c. ſunt quantitates incomplexæ.

4. Nuncupantur verò *compoſitæ*, *complexæ*, ſeu *polynomiæ*, cùm ſimul copulatè ſunt ſignis $+$, & $-$. Sic $a + b$; $ab + bb$; $ab - bc + cd$, $\frac{aa - bb}{a}$, &c. ſunt quantitates complexæ.

5. Quantitatum complexarum partes ſignis $+$, & $-$ diſtinctæ vocantur *termini*. Sic $ab + bc - cd$ eſt quantitas complexa, tribus conſtans terminis ab, bc, cd. Notanda quædam erunt de hac voce *Terminus*, quæ alibi occurrent.

6. Quantitates complexæ, quæ duobus conſtant terminis, *binomiæ* appellantur, quæ tribus, *trinomiæ*, &c.

7. Quantitates incomplexæ, quas præcedit ſignum $+$, ſeu poſitas, quas nullum ſignum præcedit (nam quantitates incomplexæ, & primi quantitatum complexarum termini, qui nullum ſequuntur ſignum, ſupponuntur affecti ſigno $+$) dicuntur

tur *positivæ*; quantitates verò, quas præcedit signum —, *negativæ*. Ex quo sequitur, quantitates complexas esse positivas, cùm termini signo + affecti terminos signo — affectos excedunt; negativas autem, cùm contra termini, quos præcedit signum —, superant terminos, quos præcedit signum +.

8 Quantitates incomplexæ, terminique quantitatum complexarum, qui easdem continent literas, nuncupantur *similes*. Sic $2abc$, & abc sunt quantitates incomplexæ similes, & $3aab - 2aab + 4abb$ est quantitas complexa, quę duos terminos habet similes $3aab$, & $-2aab$, tertius terminus $4abb$ nihil simile habet.

9 Ut facilius quantitatum algebricarum teneatur similitudo, oportet semper, priores alphabeticas literas primas scribere, alias verò secundum illum ordinem, quem in alphabeto habent. sic vice loco scribendi bac, vel cba, scribendum est abc.

10 Numeri, qui algebricas quantitates præcedunt, vocantur *coefficientes*. In hac quantitate $aa + 3ab + 4bb$, 3, & 4 sunt coefficientes terminorum $3ab$, & $4bb$. Pro coefficiente quantitatum, quæ nullum annexum numerum habent, sumitur unitas, quæ, quamvis juxta receptum usum non adscribatur, subintelligenda tamen semper est. Sic aa considerari debet, perinde ac si esset $1aa$.

REDUCTIO

Quantitatum complexarum algebricarum ad suas simpliciores expressiones.

11 ADdendi sunt coefficientes terminorum similium, cùm habent idem signum +, vel —, & summæ idem signum præponendum; cùm verò habent diversa signa, minor coefficiens a majori subducendus est, & residuo præponendum signum majoris. Sic $3ab + 2ab$ reducta sunt $5ab$; $4ac + 4ab - 6ab$ sunt $4ac - 2ab$; $3a - 5a$ sunt $-2a$; $3abc - abc$, seu $3abc - 1abc$ sunt $2abc$, &c.

In omnibus calculis algebricis nihil aggrediendum est, quin prius reducti sint termini similes.

AD.

ADDITIO

Quantitatum algebricarum incomplexarum, & complexarum.

12 SAtis eſt illas ſcribere unam poſt aliam, ſeu unam infra aliam ſimul cum ſuis ſignis, & reducere deinde terminos ſimiles, & habebitur ſumma quantitatum, quæ ſimul addendæ erant. Sic, ut addatur quantitas $3ab - 4bc + 5cd$ quantitati $2ab - 3cd$, ſcribatur $3ab - 4bc + 5cd + 2ab - 3cd$, quæ reducitur ad hanc $5ab - 4bc + 2cd$. ut addatur $5abc - 4bcd$ ipſi $5abd - 8abc + 6bcd$, ſcribatur $5abc - 4bcd + 5abd - 8abc + 6bcd$, quæ reducitur ad $5abd - 3abc + 2bcd$ ut addatur $6a + 3b$ ipſi $2a - 3b$, ſcribatur $6a + 3b + 2a - 3b$, quæ reducitur ad $8a$, &c.

SUBDUCTIO

Quantitatum algebricarum incomplexarum, & complexarum.

13 SUfficit illas ſcribere unam poſt aliam, vel unam infra aliam, inverſis prius omnibus ſignis quantitatum ſubtrahendarum; facta deinde terminorum ſimilium reductione, habebitur differentia quantitatum propoſitarum. Sic, ut ſubducatur quantitas $3a - 2b + 3c$ ex quantitate $5a - 3b - 5c$, ſcribatur $5a - 3b - 5c - 3a + 2b - 3c$, quæ reducitur ad hanc $2a - b - 8c$ ut ſubtrahatur $3ab - 2bc + 2cd$ ex $5ab - 4bc + 2cd$, ſcribatur $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$, quæ reducitur ad $2ab - 2bc$, &c.

MULTIPLICATIO

Quantitatum algebricarum incomplexarum, earumque poteſtatum.

14 DEterminatum jam eſt, ad hoc ut multiplicentur duæ, vel plures litteræ inter ſe, ſatis eſſe unam poſt aliam ſcribere nul-

nullo interposito signo, quod illas segreget, atque ita haberi productum quæsitum. Sic, ut ducatur *a* in *b*, scribatur *ab*; ut *ab* in *ac*, scribatur *aabc*, &c.

Quoniam in quantitatibus algebricis multiplicandis reperiuntur plerunque numeri, sive coefficientes, & insuper habenda est ratio signorum, ideo sequenti regula opus est.

15 Multiplicentur prius coefficientes, deinde litteræ, tandem producto præponatur signum +, si utraque quantitatum, quæ multiplicantur, ante se habeat idem signum +, vel —, si verò altera quidem habeat ante se signum +, altera autem signum —, producto præponatur signum —. Sic ut multiplicetur $3a$ per $2b$, fiat, 3 in 2 dant 6, & *a* in *b* dat *ab*, seu æquatur ipsi *ab*, sicque habebitur $6ab$ productum ex $3a \times 2b$. Pariter $3ab \times -2al = -6aabb$ & $-3ab \times -2cd = +6abcd$; & $5ab \times cd$, seu $1cd = 5abcd$; & $aab \times abb = aaabbb$, seu a^3b^3 nam quotiescunque eadem littera pluries, quàm bis in uno producto inest, semel tantùm scribatur, ad ejus autem dexteram appingitur character arithmeticus exprimens, quoties hæc littera foret scribenda. Sic pro *aaa* scribitur a^3, & pro *aaabbb*, a^3b^3; similiter pro *aa* scribi potest a^2, & pro *bb*, b^2, &c.

DEFINITIO.

16 Character arithmeticus, qui indicat, quoties aliqua littera in uno producto foret scribenda, dicitur *Exponens*. Sic in a^3b^4, 3 est exponens ipsius *a*, & 4 exponens ipsius *b*, in a^2b, 3 est exponens ipsius *a*, & 1 ipsius *b*; nam cùm aliqua littera sola est, vel semel tantum scribenda est in aliquo producto, supponendum est, ejus exponentem esse unitatem, licèt non scribatur. Sic *a* idem exprimit, ac a^1, seu $1a^1$, & a^1b idem ac a^1b^1, &c.

ADNOTATIO.

17 Sicuti multiplicatio duarum linearum rectarum generat, seu producit rectangulum, vel quadratum, si illæ sint æquales; multiplicatio verò trium linearum rectarum parallelepipedum, seu solidum, sive cubum, si pares sint: ita ob eandem rationem Algebristæ vocant rectangulum algebricum productum duarum litterarum dissimilium, ut *ab*, & quadratum alge-

gebricum productum unius litteræ per se ipsam, ut *aa*, vel a^2; solidum autem algebricum productum trium litterarum dissimilium, ut *abc*, vel *aab*, & cubum algebricum productum unius litteræ bis in se consecutivè ductæ, ut a^3, vel b^3. Verùm non in hoc finem faciunt, & quamvis nullum reperiatur in natura solidum, quod pluribus, quàm tribus, constet dimensionibus, tamen alia, atque alia concipiunt solida algebrica, quorum dimensionum numerus ad infinitum extendirur, ut a^3, a^4, a^5, a^6, a^3b, $aabb$, a^3bb, a^3b^3, &c. Quæ quantitates algebricæ eò sunt compositiores, quò earum numerus dimensionum est major; ita ut productum algebricum quadruplici constans dimensione magis compositum sit, quàm quod tripici, & quod tripici magis, quàm quod duplici, &c. Numerus autem dimensionum alicujus producti algebrici æquatur numero unitatum, qui continet summam exponentium earum quantitatum, quæ illud formant. Sic v. c. a^3b est productum quatuor dimensionum, nam 3 exponens ipsius *a*, & + 1 exponens ipsius $b = 4$. & a^3b^4 est productum septem dimensionum; eùm $3 + 4 = 7$. Idem de reliquis dicendum.

Potestatem, sive *gradum* appellant productum unius quantitatis algebricæ in seipsam ductæ semel, bis, ter, & sic in infinitum. Sic *a*, seu a^1 est primus gradus, seu prima potestas ipsius *a*; *aa*, seu a^2 secundus gradus, sive secunda potestas, vel quadratum ipsius *a*; a^3 tertius gradus, sive tertia potestas, vel cubus ipsius *a*, a^4 quartus gradus, sive quarta potestas, vel quadrato-quadratum ipsius *a*, a^5 quintus gradus, sive quinta potestas, vel quadrato-cubus ipsius *a*, a^6 sextus gradus, sive sexta potestas, vel cubo-cubus ipsius *a*, a^7 septimus gradus, sive septima potestas ipsius *a*, & sic in infinitum; ex quo apparet, potestatem suam denominationem ducere a suis exponentibus.

18 Eadem potestas aliquando considerari potest, ut productum duarum potestatum, aliquando ut potestas alterius potestatis: Sic a^2 considerari potest, ut productum ex $a^1 \times a^1$, vel ut secunda potestas ipsius a^1, vel ut tertia potestas ipsius $a^{\frac{2}{3}}$.

19 Dantur aliquæ potestates, quæ fiunt ex producto duarum, vel plurium litterarum inter se ductarum: sic $aabb$ est secunda potestas ipsius ab, & a^3b^3 est tertia potestas ipsius abb. Idem de aliis dicendum.

DE-

DEFINITIO.

20 SI duæ quantitates diſſimiles, ſive ſimiles aliquod productum, ſive poteſtatem efforment, hujuſmodi quantitates vocantur *latera*, ſeu *radices* ipſius producti, vel poteſtatis ſic a, & b ſunt latera, ſeu radices producti ab, & a latus, ſive radix poteſtatis aa, &c.

FORMATIO

Poteſtatum quantitatum incomplexarum.

21 CLarum eſt (*num.* 17.) ut aliqua quantitas incomplexa elevetur ad aliquam datam poteſtatem, ſatis eſſe, ſi hæc quantitas tot vicibus una minus in ſe ducatur, quot unitates continet exponens datæ poteſtatis. Sic ut ab elevetur ad tertiam poteſtatem, bis in ſe duci debet ab, habebiturque a^3b^3, & ſic de aliis.

22 Ex quo facile videre eſt, idipſum expeditius haberi poſſe, ſi exponentes magnitudinis datæ per exponentem poteſtatis, ad quam hæc magnitudo elevanda eſt, multiplicentur; ſic tertia poteſtas ipſius ab, ſeu a^3b^3 eſt $\overset{1\times3}{a}\ \overset{1\times3}{b} = a^3b^3$. & quarta poteſtas ipſius a^3 eſt $\overset{3\times4}{a} = a^{12}$: & tertia poteſtas ipſius aab^2, ſeu a^2b^2 eſt $\overset{2\times3}{a}\ \overset{3\times3}{b} = a^6b^9$. & tertia poteſtas ipſius $-a$, ſeu $-a^1$ eſt $-\overset{1\times3}{a} = -a^3$: & quarta poteſtas ipſius $-a$, ſeu $-a^1$ eſt $\overset{1\times4}{a} = a^4$. & in genere poteſtas n ipſius a^m eſt a^{mn}: & poteſtas n ipſius $-a^m$ eſt $\pm a^{mn}$, ſecundum quod n ſignificat numerum parem, vel imparem.

23 Manifeſtè ſequitur (*num* 14, & 15) ut multiplicetur unum productum, ſeu una poteſtas per aliud productum, ſeu per aliam poteſtatem, ubi eædem inſunt litteræ, ſufficere, earum exponentes ſimul addere. Sic $a^1 \times a^2 = \overset{3=1+2}{a} = a^3$; & $a^3b^3 \times a^3b^3 = \overset{b}{a^6}$

$= a^{2+2}b^{2+3} = a^4b^5$: & $a^3 \times a^{-5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$: & $a^3 \times a^{-3} = a^{3-3} = a^0 = 1$. Innotescet suo loco, cur $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, & $a^0 = 1$.

MULTIPLICATIO

Quantitatum algebricarum complexarum, & formationis earum potestatum.

REGULA.

24 Multiplicentur singuli unius quantitatis termini, per singulos alterius quantitatis, servatis regulis, (*num.* 14. & 15.) traditis, & habebitur totale productum, quod (*num.* 11.) ad suam simpliciorem expressionem erit reducendum.

EXEMPLA.

25 Sit quantitas . . . A $a + 2b - c$
multiplicanda per B $2a + 3b$

Producta particularia { C $2aa + 4ab - 2ac$
D $+ 3ab + 6bb - 3bc$

Produc. totale E $2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc$

Primus terminus $2a$ quantitatis B multiplicans omnes terminos quantitatis A producit quantitatem C, secundus terminus $3b$ ejusdem quantitatis B multiplicans omnes rursus terminos quantitatis A dat quantitatem D; & facta reductione quantitatum C, & D. habetur quantitas E, quæ est productum duarum quantitatum A, & B. Ergo $a + 2b - c \times 2a + 3b = 2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc$.

26 Sit quantitas A $aa + bb$
ducenda in B $aa - bb$

Produc. particularia { C $a^4 + aabb$
D $- aabb - b^4$

Produc. totale E $a^4 - b^4$

Pri-

Primus terminus aa quantitatis B ductus in quantitatem A producit quantitatem C, secundus terminus $-bb$ quantitatis B ductus in eandem quantitatem A producit quantitatem D, reductis deinde productis particularibus C, & D, habetur totale productum E. Quare $\overline{aa+bb} \times \overline{aa-bb} = a^4 - b^4$.

27 Ut aliquando exprimatur multiplicatio duarum quantitatum complexarum, sufficit inter ipsas inferere signum multiplicationis ×. Sic ut multiplicetur $a+b$ per $a-b$, scribitur $\overline{a+b} \times \overline{a-b}$, vel $\overline{a-b} \times \overline{a+b}$, & sic de aliis.

FORMATIO

Potestatum quantitatum complexarum.

28 UT quantitas aliqua complexa elevetur ad aliquam potestatem, necesse est, sicut in quantitatibus incomplexis dictum est, eam consecutivè multiplicari tot vicibus una minus, quot unitates continet exponens datæ potestatis. Sic ut $a+b$ elevetur ad tertiam potestatem, oportet (*num.* 24.) ducere $a+b$ in $a+b$, & habebitur productum $aa+2ab+bb$, quod rursus ductum in $a+b$ dabit $a^3+3aab+3abb+b^3$, quod est tertia potestas, sive cubus ipsius $a+b$. Idem de aliis dicendum.

Expeditior reddi potest operatio, quotiescunque aliquod polynomium elevandum est ad quadratum, nimirum

29 Scribatur quadratum primi termini +, vel − bis rectangulo, seu producto primi termini in secundum, + quadrato secundi termini. hi tres termini erunt quadratum quæsitum, si sit binomium. Sed si fuerit trinomium, scribatur ulterius +, vel − bis producto duorum priorum terminorum per tertium + quadrato tertii. Si quadrinomium fuerit, scribatur itidem +, vel − bis producto trium priorum terminorum per quartum + quadrato quarti, & sic deinceps. Sic quadratum ipsius $a-b+c$ est $aa-2ab+bb+2ac-2bc+cc$.

Apposita est hic hæc abbreviatio, qua perfrequens erit usus hujus praxeos in algebræ ad Geometriam applicatione.

Verùm ecce tibi alia magis peculiaris abbreviatio pro elevando binomio ad quamlibuerit potestatem.

30 Scribatur in primo termino prima littera binomii evecta ad datam potestatem, in secundo eadem littera evecta ad pote-

ſtatem una minotem; & ducta in ſecundam literam, in tertio eadem littera evecta ad poteſtatem una rurſus minorem, & ducta in quadratum ſecundæ, & ſic deinceps, minuendo in quovis termino unitate poteſtatem primæ literæ, & contra augendo unitate poteſtatem ſecundæ, donec perveniàs ad terminum, ubi eadem prima littera unica tantum conſtet dimenſione, qui erit terminus penultimus, & tandem ultimo termino ſcribatur ſecunda littera ad eandem evecta poteſtatem, ad quam prima littera. Sic ut elevetur $a \pm b$ ad quartam poteſtatem, ſcribatur A $a^4 \pm a^3b + aabb \pm ab^3 + b^4$. Si totum binomium eſt poſitivum, omnis poteſtatis terminus ſigno + erit afficiendus; ſi verò ſecunda littera eſt negativa, termini, in quibus illa erit evecta ad poteſtatem impatem, ſeu cujus exponens eſt numerus impar, afficiendi erunt ſigno —; reliqui verò omnes ſigno +, uti videre eſt in poteſtate A

Supereſt adhuc methodus inveniendi coefficientes, quæ talis eſt

Exponens primi termini erit coefficiens ſecundi, productum deinde, quod provenit ex ductu coefficientis ſecundi termini in exponentem, quem prima littera *a* binomii habet in eodem ſecundo termino, diviſum per 2 erit coefficiens tertii termini, ſimiliter productum, quod habetur ex multiplicatione coefficientis tertii termini per exponentem, quem prima littera habet in eodem tertio termino, diviſum per 3 erit coefficiens quarti, & ſic deinceps, ita ut productum proveniens ex ductu coefficientis termini cujuſcunque in exponentem, quem prima binomii littera habet in eodem termino, diviſum per numerum indicantem, quem locum idem terminus occupet inter ordinem terminorum poteſtatis ſit coefficiens termini ſequentis. Sic quarta poteſtas binomii $a \pm b$ perfecte formata eſt $a^4 \pm 4a^3b + 6aabb \pm 4ab^3 + b^4$ Quod & de aliis dicendum eſt.

Si detur aliquis numerus integer, vel fractus, qui præcedat alterutrum, vel utrumque binomii terminum, multiplicandus erit coefficiens cujuſque termini poteſtatis per poteſtatem hujus numeri æqualem illi, ad quam littera, quam ille numerus præcedit, eſt evecta, ſic ut elevetur $a + 2b$ ad tertiam poteſtatem, in primis ad illam elevandum eſt binomium, ſcilicet $a^3 + 3a^2b + 3abb + b^3$, deinde ducendi ſunt coefficientes eorum terminorum, in quibus ineſt *b*, in poteſtatem numeri 2 æqualem illi potentiæ, ad quam *b* eſt evectum, hoc eſt, multiplicandum

dum eſt $3aab$ per 2, $3abb$ per 4, & b^3 per 8; atque hoc modo habebitur $a^3+6aab+12abb+8b^3$, cubus numerum binomii $a+2b$.

Juxta has regulas binomium quodcunque $p+q$ attolli poterit ad quamvis poteſtatem indeterminatam m, (m ſignificat numerum quemlibet integrum, vel fractum, poſitivum, vel negativum) quæ erit $p^m+mp^{m-1}q+m\times\frac{m-1}{2}p^{m-2}q^2+m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}p^{m-3}q^3+m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}p^{m-4}q^4$, &c. Ubi videre eſt, primæ litteræ p binomii exponentem eſſe in omnibus terminis m minus numero integro, ideoque ſi is numerus integer reperitur in aliquo termino æqualis ipſi m, exponens ipſius p in eo termino erit $=0$, & conſequenter $p=1$, & hic terminus erit ultimus poteſtatis m in binomio $p+q$. Sed ſi is numerus integer nunquam reperiatur $=m$, poteſtas m binomii $p+q$ continuari uſque in infinitum poterit.

31 Binomium $p+q$ evectum ad poteſtatem m, eo modo, quo mox factum eſt, canon generalis eſſe potest, ut quodvis binomium, ſeu polynomium ad datam quamlibet poteſtatem elevetur.

Eſto v. g. $2ax-xx$ elevandum ad tertiam poteſtatem.

Supponatur $2ax=p$, $-xx=q$, & $m=3$ loco ipſorum p, q, & m ſubſtituendi erunt eorum valores, ſcilicet $2ax$, $-xx$, & 3, & loco poteſtatum ipſorum p, & q ſubſtituendæ erunt poteſtates æquales eorum valorum $2ax$, & $-xx$, & habebitur $8a^3x^3-12aax^4+6ax^5-x^6$ pro poteſtate quæſita, nam m in quarto termino canonis reperitur $=3$. Eadem ratione, ut attollatur $a+b-c$ ad tertiam poteſtatem, ſuppoſitis $a=p$, $+b-c=q$, & $m=3$, factiſque ſubſtitutionibus, proveniet $a^3+3aab+3abb+b^3-3aac-6abc+3acc-3bbc+3bcc-c^3$, & ſic de aliis.

32 Sufficit quandoque, ut elevetur polynomium ad datam poteſtatem, ſcribere ad ejus dextram exponentem ejus poteſtatis, ad quam eſt evehendum. Sic ut elevetur $a\pm b$ ad quadratum, ſcribitur $\overline{a\pm b}^2$, ut elevetur ad cubum, ſcribitur $\overline{a\pm b}^3$, & in genere, ut $a\pm b$ elevetur ad poteſtatem m, ſcribitur $\overline{a\pm b}^m$; m ſignificat quem volueris numerum integrum, vel fractum, poſitivum, vel negativum, ut dictum eſt.

33 Manifeſtum eſt, ut poteſtas quævis alicujus polynomii, uti dictum eſt formata, elevetur ad aliam datam poteſtatem, ſatis eſſe, ſi unius exponens in alterius exponentem ducatur. Sic

ut

ut elevetur $\overline{a+b}$ ad tertiam poteſtatem, ſcribatur $\overline{a+b}^{2\times 3} = \overline{a+b}^{6}$, ut elevetur $\overline{a+b}^{n}$ ad quadratum, ſeu ſecundam poteſtatem, ſcribatur $\overline{a+b}^{2n}$, ut elevetur $\overline{a+b}^{n}$ ad poteſtatem n, ſcribatur $\overline{a+b}^{nn}$, &c.

34 Patet etiam, ut multiplicentur duæ poteſtates ejuſdem quantitatis complexæ, quæ ſint eo modo formatæ, quo dictum eſt *num.* 32, ſufficere, ſi earum exponentes ſimul addantur. Sic ut multiplicetur $\overline{a+b}^{2}$ per $\overline{a+b}^{3}$, ſcribatur $\overline{a+b}^{2+3} = \overline{a+b}^{5}$, ut $\overline{a+b-c}^{2} \times \overline{a+b-c}^{-5} = \overline{a+b-c}^{2-5} = \overline{a+b-c}^{-3}$, ut $\overline{a-b}^{m} \times \overline{a-b}^{n} = \overline{a-b}^{m+n}$; ut $\overline{a+b}^{n} \times \overline{a+b}^{-n} = \overline{a+b}^{n-n}$; ut $\overline{a+b}^{m} \times \overline{a+b}^{-m} = \overline{a+b}^{m-m} = \overline{a+b}^{0} = 1$.

DIVISIO

Quantitatum algebricarum incomplexarum, & complexarum.

REGULA GENERALIS.

35 Scribatur diviſor infra dividendum ad modum fractionis, eritque hæc fractio quotiens diviſionis. Et ſane, quoniam omnis diviſio numerica prædicto modo expreſſa æquatur ſuo quotienti, ut v. c. $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{25}{5} = 5$, eaque conſequenter ſumi poteſt pro ſuo quotiente; idipſum de diviſionibus algebricis dicendum eſt. Sic ut dividatur ab per c, ſcribatur $\frac{ab}{c}$, ut dividatur $aa+bb$ per $c+d$, ſcribatur $\frac{aa+bb}{c+d}$, &c.

36 Verùm ſicuti ſemper neceſſe eſt reducere, quotieſcunque id fieri poteſt, quantitates algebricas ad ſuas ſimpliciores expreſſiones, & diviſiones, ſeu fractiones, de quibus loquimur, non ſemper ſunt reductæ; ideo ad hoc neceſſariæ quædam regulæ tradendæ ſunt.

Diverſi dantur modi, vel potius diverſi caſus, in quibus modò hæc regula, modò illa adhibenda eſt, ad hoc, ut fractiones, ſeu diviſiones ad ſuas ſimpliciores terminos reducantur:

Nos

Nos in præſentiarum eos tantùm proponemus caſus, in quibus ea reperitur operatio, quæ diviſio ſemper eſt appellata; alias operationes alibi reperies.

DIVISIO I

Quantitatum incomplexarum.

37 CLarum eſt, (*num.* 14, & 15) cùm dividendum eſt productum reſultans ex multiplicatione diviſoris per aliam quamlibet quantitatem, deleto diviſore, quotientem eſſe idem ac dividendum. Sic quotiens ipſius ab diviſi per a eſt b, hoc eſt $\frac{ab}{a}=b$; quotiens ipſius abc diviſi per ab eſt c, hoc eſt $\frac{abc}{ab}=c$; ſimiliter $\frac{a^2}{aa}=a$; & $\frac{a^2bb}{aab}=ab$. Idem de alus dicendum.

Quoniam ſæpe dantur numeri ab unitate diverſi, qui aliquando dividendum, aliquando diviſorem, & aliquando utrumque præcedunt, & inſuper attendenda ſunt ſigna; ideo ſequens regula ſervanda eſt.

38 Dividatur primo quidem ſecundum regulas diviſionis numericæ numerus, qui dividendum præcedit, per numerum, qui præcedit diviſorem; deinde verò dividantur ipſæ litteræ dividendi (*num* 37) per litteras diviſoris, & quotienti præponatur ſignum +, ſi tam dividendum, quàm diviſor idem ſignum +, vel — habeant, ſi verò uni quidem ſignum +, alteri autem ſignum — præpoſitum ſit, quotiens ſigno — afficiatur. Sic quotiens ex $12ab$ diviſo per $3a$ eſt $4b$, nam $\frac{12}{3}=4$, & $\frac{ab}{a}=b$; ideoque $\frac{12ab}{3a}=4b$: ſimiliter $\frac{12abc}{-4ac}=-3b$: & $\frac{-15a^2bb}{3aab}=-5b$: & $\frac{-12a^3bb}{-3abb}=4aab$, &c

39 Si dividendum, & diviſor ſint ſimiles, & æquales, quotiens erit unitas. Sic $\frac{a}{a}=1$; & $\frac{12ab}{12ab}=1$. Quod ex eo provenit, quòd omnis quantuas ſeipſam menſurat, vel ſeipſam continet ſemel.

40 Non rarò contingit, ut numeri quidem dividi poſſint, litteræ verò minimè, vel contra, tum diviſo, quod dividi valet, reliquum ad fractionem reducatur. Sic $\frac{12ab}{3c}=\frac{4ab}{c}$, & $\frac{2abc}{2ab}=\frac{c}{1}$.

41 Cùm autem neque numeri, neque litteræ diviſionem pa-

tian-

tiuntur, ſcribendus, eſt diviſor infra dividendum in modum fractionis, & tum ipſa fractio ſumenda eſt pro diviſionis quotiente. Sic ut dividatur a per b, ſcribatur $\frac{a}{b}$; ut $3ab$ per $2c$, $\frac{3ab}{2c}$; ut $-2ab$ per $3c$, $\frac{-2ab}{3c}$, ſeu, $\frac{2ab}{-3c}$; ut $5ab$ per $-2c$, $\frac{5ab}{-2c}$, vel $\frac{-5ab}{2c}$, ut $-4ab$ per $-3c$, $\frac{-4ab}{-3c}$, ſive $\frac{4ab}{3c}$. Ratio cur in his exemplis facta ſit ſignorum mutatio, alibi repetietur.

Si quotiens alicujus diviſionis ducatur in diviſorem, proveniet quantitas dividenda, nam multiplicatio, & diviſio contrarios habent effectus, non minus ac additio, & ſubductio.

42 Notum eſt, (*num.* 21, & 37) ut dividatur poteſtas quæcunque alicujus quantitatis incomplexæ per ejuſdem quantitatis poteſtatem quamcunque, ſatis eſſe ſubducere diviſoris exponentem ab exponente dividendi. Sic $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$; & $\frac{a^4b^3}{a^3b} = a^{4-3}\ b^{3-1} = ab^2$; & $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} =$ (num. 39) 1; & $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; & $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; & $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = 1$, &c.

DIVISIO

Quantitatum complexarum.

43 CUm dividendum fuerit productum diviſoris in quamlibuerit quantitatem, facilè patet, diviſionem non minus exactè futuram, quàm ſit in quantitatibus incomplexis.

Porro facile ſæpe eſt cognoſcere, num quantitas, quæ dividenda eſt per aliam quantitatem, ſit productum ejus quantitatis, quæ debet eſſe diviſor, per aliquam tertiam quantitatem, tunc verò quotiens erit hæc tertia quantitas. Sic $ax - bx$ diviſum per $a - b$ dat quotientem x, nam $ax - bx$ eſt productum ex $a - b \times x$, & $ax - bx$ diviſum per x dat quotientem $a - b$ ſimiliter $\frac{aaxx - bbxx}{aa - bb} = xx$, & $\frac{aaxx - bbxx}{xx} = aa - bb$.

44 Cùm autem non tam facilè cognoſci poteſt, an aliqua quantitas complexa per aliam quantitatem complexam dividi poſſit, examinanda eſt ope regulæ ſequentis, quæ ea eſt, quæ diviſio appellatur.

45

45 Ut facilius ſuccedat diviſio quantitatum complexarum, examinetur in illis duabus quantitatibus, quarum una per aliam dividenda eſt, quænam littera frequentiùs reperiatur cum dimenſionibus differentibus, ſcribaturque primo loco in utraque quantitate terminus ille, ubi hæc littera plures habet dimenſiones, deinceps verò ſcribantur alii termini juxta ordinem poteſtatum ejuſdem litteræ. Hanc litteram, *litteram dominantem*, Nonnulli vocant.

REGULA.

46 SCribatur diviſor ad ſiniſtram dividendi, & juxta regulas diviſionis quantitatum incomplexarum dividatur primus terminus dividendi per primum terminum diviſoris, id verò, quod reſultat, ſeu quotiens ad dexteram dividendi ſcribatur. Multiplicentur deinde omnes diviſoris termini per quotientem, ſubductoque inde orto producto ex dividendo, quod fit (*num* 13) ſcribendo idem productum infra dividendum, ſignis inverſis, fiat reductio tam dividendi, quàm hujus producti, perinde ac ſi una quantitas foret.

Iterum dividantur per eundem diviſorem quantitates, quæ facta reductione, ſuperſunt, novuſque terminus inde proveniens ponatur in quotiente, terminetur hæc ſecunda operatio, eo modo, quo prima. Repetatur rurſus eadem operatio, quoties opus eſt, donec reductio vel nulla evadit, vel æqualis zero, id, quod ſemper contingit, quotieſcunque quantitas dividenda eſt productum diviſoris per aliquam tertiam quantitatem, quæ eſt quotiens diviſionis. Regula exemplis innoteſcet.

EXEMPLUM I.

47 ESto $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ dividendum per $a - b$: ſcriptis dividendo, & diviſore eo modo, quo dictum eſt, ſumptaque littera a, tanquam littera dominante, ita agendum eſt.

Diviſor. *Dividendum.* *Quotiens.*

$a - b$ $\left\{ \begin{array}{l} a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\ -a^3 + aab \end{array} \right\}$ $aa - 2ab + bb$

Productum.

1 Reduct. A $0 - 2aab + 3abb - b^3$

Product. $+ 2aab - 2abb$

2 Reduct. B $0 + abb - b^3$

Product. $- abb + b^3$

3 Reduct. C $0 \quad 0$

Primus terminus a^3 dividendi diviſus per primum $+a$ diviſoris dat quotientem $+aa$, ductoque diviſore $a - b$ in quotientem $+aa$, habetur $a^3 - aab$; ſcriptoque deinde $-a^3 + aab$ ſubter dividendum, & facta reductione, habetur quantitas A, quæ prima Reductio dicatur.

Deinde primus terminus $-2aab$ primæ reductionis A diviſus per primum $+a$ diviſoris dat quotientem $-2ab$; ducto autem diviſore $a - b$ in hunc novum quotientis terminum $-2ab$, provenit $-2aab + 2abb$, & ſcripto $+2aab - 2abb$ infra primam reductionem A, habetur ſecunda Reductio B.

Tandem primus terminus $+abb$ ſecundæ reductionis B diviſus per primum diviſoris $+a$ dat quotientem $+bb$, qui quotiens $+bb$ ductus in diviſorem $a - b$, producit $+abb - b^3$, ſcriptoque $-abb + b^3$ ſub ſecunda reductione B, habetur zero pro tertia reductione C, indicans diviſionem abſolutam eſſe, & conſequenter $\frac{a^3 - 3aab + 3abb - b^3}{a - b} = aa - 2ab + bb$.

EXEM.

EXEMPLUM II.

48 *Divisor.* *Dividendum.* *Quotiens.*

$aa - ab + cd$ | $a^3 - aab + 2abd - ccd$ | $aa + ab - cd$

Product. $-a^3 + a^2b - aacd$

1 Reduct. $0 + a^2b - aab - aacd + 2abcd - ccd$

Product. $-a^2b + aab \quad -abcd$

2 Reduct. $0 \quad 0 - aacd + abcd - ccd$

Product. $+aacd - abcd + ccd$

3 Reductio $0 \quad 0 \quad 0$

Ergo $\frac{a^3 - aab + 2abcd - ccd}{aa - ab + cd} = aa + ab - cd.$

EXEMPLUM III.

49 *Divisor.* *Dividendum.* *Quotient.*

$yy - aa - bb$ | $y^4 + aay^2 + b^2yy - a^4 - 2bby^2 - a^2yy - 2a^2bb - aab^2$ | $y^2 + 2aayy + a^4 - bbyy + aabb$

Product. $-y^4 + aay^2 + bby^2$

1 Reduct. $0 + 2aay^2 + b^2yy - a^4 - bby^2 - a^2yy - 2a^2bb - aab^2$

Product. $-2aay^2 + 2a^2yy + 2aabbyy$

2 Reduct. $0 - bby^2 + b^2yy - a^4 + a^2yy - 2a^2bb + 2aabbyy - aab^2$

Product. $+bby^2 - aabbyy - b^2yy$

3 Reduct. $0 + a^2yy - a^4 + aabbyy - 2a^2bb - aab^2$

Product. $-a^2yy + a^4 + a^2bb$

4 Reduct. $\{ 0 + aabyy - a^3bb - a^2b^2 \}$

Product. $\{ - aabbyy + a^3bb + a^2b^2 \}$

5 Reduct. $0 \quad 0 \quad 0$

Ergo $\dfrac{y^4 + ay^3 + byy - a^4 - 2bby^2 + a^2yy - 2a^3bb - aab^2}{yy - aa - bb} = y^2 + 2ayy + a^4 - bbyy + aabb$

EXEMPLUM IV.

50 *Divisor.* $3xx - aa$ — *Dividendum.* $9x^4 + 12ax^3 - 4a^2x - a^4$ — *Quotiens.* $3xx + 4ax + aa$

Product. $-9x^4 + 3aaxx$

1 Reduct. $0 + 12ax^3 + 3aaxx - 4a^2x - a^4$

Product. $-12ax^3 \quad + 4a^2x$

2 Reduct. $0 + 3aaxx - a^4$

Product. $-3aaxx + a^4$

3 Reduct. $0 \quad 0$

Ergo $\dfrac{9x^4 + 12ax^3 - 4a^2x - a^4}{3xx - aa} = 3xx + 4ax + aa$

51 Dantur divisiones, quæ non nisi partiatim fiunt; quod tum accidit, cùm habetur aliqua reductio, in qua vel omnes litteræ divisoris minimè reperiuntur, vel, si reperiuntur, non amplius servant statum, & ordinem, quem habent in divisore: tum scribitur divisor infra ultimam reductionem, orieturque fractio, quæ quotienti addenda est, uti videre est exemplo sequenti.

EXEMPLUM V.

52 *Divisor.* $ac - dd$ — *Dividendum.* $aabc + ac^2 - abdd - cdd + d^2$ — *Quotiens.* $ab + ac$

Product. $-aabc \quad + abdd$

1 Reduct. $0 + ac^2 \quad 0 - cdd + d^2$

Product. $-ac^2 \quad + cdd$

2 Reduct $0 \quad - \quad 0 + d^2$

Ergo

Ergo $\frac{aabc + acx - abdd - cddd + dx}{cc - dd} = ab + cc + \frac{dx}{cc - dd}$.

53 Dantur quædam divisiones, quæ penè ad infinitum continuari possent, quamvis omnes termini divisoris non reperiantur in ultima reductione, sed quotiens valde compositus evaderet, divisioque inutilis esset. Ideoque in hujusmodi divisionibus ibi subsistendum est, ubi quotiens sit quàm simplicissimus.

54 Non rarò etiam contingit, ut coefficientes, seu numeri, qui præcedunt terminos si non omnes saltem aliquos tam dividendi, quàm divisoris, impedimento sint, quominus divisio fieri queat, licèt omnes litteræ in utroque ita sint dispositæ, ut tamen divisio peragi possit.

55 Reperiuntur quoque nonnullæ divisiones, quæ nullo prorsus modo fieri possunt; cùm nimirum nullus terminorum divisoris reperiatur totus in aliquo terminorum dividendi; tum divisore scripto infra dividendum fit fractio, quæ pro divisoris quotiente sumitur, ut dictum est *num.* 41.

Sæpe etiam opus est cognoscere omnes divisores alicujus dati numeri, vel alicujus datæ quantitatis algebricæ, ut inter eos ille seligatur, qui operationibus faciendis accommodatissimus sit. Quare hujusce rei methodum hic apponere visum est.

METHODUS

Inveniendi omnes alicujus dati numeri divisores.

56 DIvidendus est propositus numerus per 2, si fieri potest, idque quoties fieri potest, deinde ultimus quotiens dividendus est per 3, si potest, & hoc quoties potest, pariter per 5, per 7, per 9, &c. donec vel ultimus quotiens sit unitas, vel divisor sit ipse datus numerus, in quo casu nullum divisorem, præter seipsum, ille admittit. Scriptis postea, singulis infra alios, omnibus divisoribus, qui adhibiti sunt, multiplicetur primus divisor per secundum, productumque scribatur ad dextram secundi divisoris; porro duo primi divisores, & productum jam inventum multiplicentur per tertium divisorem, & producta unum post aliud scribentur contra eundem tertium divisorem; tandem omnis numerus, qui est supra quartum divisorem, per ipsum quartum divisorem multiplicetur, ad cujus dexteram producta

ducta ſcribantur, & ſic deinceps. omnia hæc producta erunt diviſores numeri propoſiti.

EXEMPLUM.

Eſto numerus 150, cujus omnes diviſores ſint inveniendi.

Divido 150 per 2, & quotientem quidem 75 ſcribo infra A, diviſorem autem 2 infra B: divido dein 75 per 3, quotientemq; 25 ſub A, & diviſorem 3 ſub B ſcribo: poſtea divido 25 per 5, ſcriboque quotientem 5, & diviſorem 5 ſubter A, & B: tandem divido 5 per 5, & diviſorem 5 ſub B, & quotientem 1 ſcribo ſub A. Quibus peractis, ducto primo diviſore 2 in ſecundum 3, productum 6 ſcribo ad dexteram diviſoris 3; ductis item ſingulis numeris, qui ſunt ſupra tertium diviſorem 5 in ipſum diviſorem 5, ad ejus latus ſcribo producta 10, 15, 30; denique ductis ſingulis numeris exiſtentibus ſupra quartum diviſorem 5 in eundem diviſorem 5, producta 25, 50, 75, 150 (nam producta 10, 15, cùm jam alibi habeantur, omittuntur) ſcribo eo modo, quo dictum eſt. Clarum eſt, ſingulos numeros, qui ſunt in ſerie B, exactè, & ſine reſiduo dividere poſſe propoſitum numerum 150.

A	B
150	2
75	3. 6
25	5. 10. 15. 30
5	5. 25. 50. 75. 150
1	

57 Eadem regula inſervit etiam quantitatibus algebraicis. Sit v. c. quantitas $a^3b + aabb$, cujus omnes diviſores ſint inveniendi.

A	B
$a^3b + aabb$	a
$aab + abb$	a. aa
$ab + bb$	b. ab. aab
$a + b$	$a+b$. $aa+ab$. a^3+aab. $ab+bb$. $aab+abb$. $a^3b+aabb$
1	

Divido $a^3b + aabb$ per a, & quotientem quidem $aab + abb$ ſcribo infra A, diviſorem verò a infra B. deinde divido $aab + abb$ iterum per a, ſcriboque quotientem $ab + bb$ ſub A, & diviſorem a ſub B: poſtea divido $ab + bb$ per b, & ſcribo quotientem $a + b$, & diviſorem b ſubter A, & B: tandem divido $a + b$ per $a + b$, & quotientem 1 ſcribo ſub A, diviſorem verò

rò $a+b$ ſub B: ſervatis porro iiſdem operationibus, quæ ſupra in numeris, habeo infra B omnes diviſores quantitatis a^2b+ab.

RESOLUTIO

Poteſtatum, ſeu extractionis radicum quantitatum algebricarum.

58 EXtrahere radicem alicujus poteſtatis, ſeu quantitatis algebricæ eſt invenire operatione contraria operationi formationis poteſtatum quantitatem ſimpliciorem, quàm ſit propoſita, quæ ducta in ſeipſam, quoties ſit opus, producat eandem poteſtatem, ſeu quantitatem propoſitam.

Radicum genera tot ſunt, quot poteſtatum, & unicuique radici nomen poteſtatis, ad quam refertur, attribuitur. Sic illa quantitas, quæ non niſi ſemel in ſe ducenda eſt, ut producatur poteſtas, cujus illa eſt radix, dicitur *radix quadrata*, ſeu ſecunda radix; illa, quæ bis in ſe ducenda eſt, ut habeatur poteſtas, cujus illa eſt radix, vocatur *radix cubica*, ſive tertia radix, illa, quæ ter in ſe ducenda eſt, nominatur *radix quadrato-quadrata*, vel quarta radix, illa, quæ quater in ſe ducenda eſt, appellatur *radix quadrato-cubica*, ſeu quinta radix; illa, quæ quinquies ducenda in ſe eſt, *radix cubo-cubica*, ſeu ſexta radix, &c.

Ad ſignificandum nomen *radicis* adhibetur ſequens character $\surd$, qui *ſignum radicale* appellatur, cui, ut determinetur ad aliquam ſtatam radicem ſignificandam, appingitur exponens ejus poteſtatis, ad quam refertur radix, de qua agitur, aſque exponens cum exponens ſigni radicalis dicitur. Sic $\sqrt[2]{}$, vel ſimpliciter $\surd$ ſignificat radicem quadratam, ſeu ſecundam radicem, & $\sqrt[3]{}$ ſignificat radicem cubicam, ſeu tertiam radicem, &c. adeo ut $\surd ab$, aut $\surd \overline{aa+bb}$, vel $\surd \overline{aa+2ab+bb}$ indicet, extrahendam eſſe radicem quadratam ex ab, vel ex $aa+bb$, aut ex $aa+2ab+bb$, &c.

Quantitatum aliæ ſunt, ex quibus radix propoſita extrahitur exactè; aliæ, ex quibus radix non niſi ex parte extrahi valet; aliæ, ex quibus radix nullo modo poteſt extrahi.

59 Quantitates, quarum radix exactè extrahi nequit, quæ ta-

tamen signo radicali exprimi debent, appellantur *surdæ*, seu *irrationales*; quæ verò nullo radicali signo sunt affectæ, dicuntur *rationales*. Sic $\surd ab$, $\surd \overline{aa + bb}$ sunt quantitates irrationales, cùm ex his minimè radix quadrata extrahi queat similiter $\sqrt[3]{aab}$ est quantitas irrationalis, cum ex ea nullo pacto extrahi possit radix cubica, &c.

EXTRACTIO

Radicum quantitatum incomplexarum.

60 QUoniam (*num.* 22.) ad hoc, ut elevetur aliqua quantitas incomplexa ad quamvis propositam potestatem, ducendi sunt exponentes hujus quantitatis in exponentem potestatis propositæ, clarum est, ut extrahatur radix proposita alicujus quantitatis incomplexæ, tantùm dividendos esse exponentes hujus quantitatis per exponentem signi radicalis convenientis, seu, quod in idem recidit, multiplicandos esse exponentes quantitatis propositæ per fractionem, cujus numerator sit unitas, denominator verò sit exponens signi radicalis, de quo agitur, hoc est per $\frac{1}{2}$, si agatur de radice quadrata, per $\frac{1}{3}$, si de cubica, per $\frac{1}{4}$, si de quadrato-quadrata, &c.; nam denominatores 2, 3, 4, sunt exponentes signorum radicalium $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, &c. Unde operatio extractionis radicum redditur similis operationi formationis potestatum, habenturque exponentes pro radicibus, non minus ac pro potestatibus; nam $\frac{1}{2}$ est exponens radicis quadratæ, $\frac{1}{3}$ exponens cubicæ, $\frac{1}{4}$ exponens quadrato-quadratæ, &c., & consequenter perinde enunciari potest extractio radicum, si dicas, elevandam esse aliquam datam quantitatem ad potestatem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ac si dicas, extrahendam esse radicem quadratam, cubicam, quadrato-quadratam.

Si post multiplicationem exponentium quantitatis propositæ per fractiones, de quibus sermo est, exponentes, qui tum fractionarii sunt, toti ad integrum reduci valeant, radix proposita erit quantitas rationalis, sin verò altera tantum pars horum exponentium reduci possit ad integrum, remanente altera parte fractionaria, radix non nisi in parte extracta erit, &c.

tum

tum pars rationalis ponenda est ante signum radicale, pars autem irrationalis post idem signum. Si autem toti exponentes remaneant fractionarii, radix minimè erit extracta; & tum quantitati propositæ præponendum erit signum radicale. Si denique exponentes fractionarii, qui ad integrum reduci non possunt, excedunt unitatem, potestas litteræ, cujus illi sunt exponentes, erit partim rationalis, & partim irrationalis. Eodem modo agendum erit circa coefficientes, quo circa litteras, adhibita extractione numerica radicum, & servata methodo inveniendi omnes alicujus dati numeri divisores tradita *num.* 56. Quæ omnia exemplis sequentibus patebunt.

EXEMPLA

61 ESto quantitas $a^2b^4c^6$, cujus radix quadrata extrahenda sit, seu quæ elevanda sit ad potestatem $\frac{1}{2}$, ductis exponentibus 2, 4, 6 in $\frac{1}{2}$, habebitur $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{4}{2}}c^{\frac{6}{2}}$, seu reductis exponentibus fractionarius ad integros ab^2c^3, ita ut $\surd a^2b^4c^6 = ab^2c^3$, quod clarum est.

Similiter $\surd a^2b = a\surd b^{\frac{1}{2}}$; nam a est radix ipsius aa, & $b^{\frac{1}{2}}$ est idem ac $\surd b$; pariter $\surd ab = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \surd ab$, hoc est $\surd ab$ est quantitas tota irrationalis; item $\surd a^3b = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = (num.$ 23$) a^1a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a\surd ab$, tandem $\surd 72a^2b^2 = 6ab\surd 2ab$, nam ex præcedentibus exemplis patet, $\surd a^2b^2 = ab\surd ab$, &, ut facilè obtendi potest, $\surd 72 = 6\surd 2$, nam si (*num.* 56) quærantur omnes divisores numeri 72, examinenturque omnes numeri quadrati, qui in illis continentur (si de radice cubica agerentur, examinandi forent omnes cubi, quod & de aliis radicibus dictum velim) invenietur, quadratum numerum 36 esse maximum; sed $\frac{72}{36} = 2$, & $36 \times 2 = 72$. Quare $\surd 72$ considerari potest tanquam productum ex $\surd 36 \times \surd 2$; sed $\surd 36 = 6$. Ergo $\surd 72 = 6\surd 2$, ideoque $\surd 72a^2b^2 = 6ab\surd 2ab$. Eadem ratione invenietur $\surd 12ab = 2a\surd 3b$; & $\surd 6aabc = a\surd 6bc$; nam numerus 6 nullo numero quadrato dividi potest.

EXTRACTIO

Radicum Polynomiorum.

62 METhodus extrahendi radices ex polynomis ſecundum communem modum eſt illi ſimilis, qua extrahitur radix ex numeris.

EXEMPLUM I.

SIt quantitas $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$, cujus radix quadrata ſit extrahenda.

Diviſores.	*Quantitas propoſita.*	*Radix, ſive Quotiens.*
	$aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$	$\left\{ a + b + c \right.$
	$-aa$	
1. $2a + b$	A $\circ + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$	
	$-2ab - bb$	
2. $2a + 2b + c$	B $\circ \quad \circ + 2ac + 2bc + cc$	
	$-2ac - 2bc - cc$	
	C $\circ \quad \circ \quad \circ$	

Quoniam liquet, primum terminum aa eſſe quadratum, ejus radicem, quæ eſt a, ſcribo in quotiente, & ſubduco ejuſdem radicis a quadratum ſcilicet aa ex primo termino aa quantitatis propoſitæ, illud nempe ſubſcribendo cum ſigno —. Quod ut aſſequar, reduco & quantitatem propoſitam, & quadratum ſubducendum ad methodum diviſionis, reductionemque A infra lineam ſcribo.

Duplicato quotiente a, habetur $2a$, quem ſcribo ad ſiniſtram reductionis A, eſtque una pars primi diviſoris. Diviſo primo termino $2ab$ quantitatis A per $2a$, habetur b, quod ſcribo & in quotiente, & ad dexteram diviſoris $2a$, habeturque primus diviſor completus $2a + b$, quo ducto in novum quotientem b, producitur $+ 2ab + bb$, quod ſubtraho ex quantitate A, illud ſubſcribendo cum ſignis contrariis, factaque reductione hatum duarum quantitatum, remanet quantitas B.

Rurſus duplicato quotiente $a + b$, provenit $2a + 2b$, ſcilicet una

una pars ſecundi diviſoris, ſcriboque ad ſiniſtram B. Diviſo primo termino $2ac$ quantitatis B per $2a$, habetur c, quo ſcripto tam in quotiente, quàm ad dextram diviſoris ſecundi $2a + 2b$, reſultat $2a + 2b + c$ ſecundus diviſor completus, ſecundus hic diviſor ductus in novum quotientem c dat productum $2ac + 2bc + cc$, quo ſcripto infra quantitatem B cum ſignis inverſis, reductiſque quantitatibus, reperitur zero pro tertia reductione C, ex quo inferre licet, operationem completam eſſe, & conſequenter $\sqrt{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc} = a + b + c$.

EXEMPLUM II.

ESto quantitas $9aa - 12ab + 4bb$, ex qua extrahenda ſit radix quadrata.

Diviſor.	*Quantitas propoſita.*	*Radix ſeu Quotiens.*
	$9aa - 12ab + 4bb$	$3a - 2b$
	$-9aa$	
$6a - 2b$	A $\quad 0 - 12ab + 4bb$	
	$+12ab - 4bb$	
	B $\quad 0 \quad 0$	

Primi termini $9aa$ quadrati radix eſt $3a$, qua ſcripta in quotiente, ſubſcribo ejus quadratum $9aa$ cum ſigno $-$ infra terminum $9aa$ quantitatis propoſitæ, factaque reductione, habetur quantitas A. Duplicato quotiente $3a$, provenit $6a$ una pars primi diviſoris, quam ad ſiniſtram quantitatis A ſcribo. Diviſo $-12ab$ per $+6a$, habetur $-2b$, quo & in quotiente, & ad dextram diviſoris $6a$ ſcripto, habetur diviſor $6a - 2b$ completus. Ducto $+6a - 2b$ in $-2b$, oritur productum $-12ab + 4bb$, quo mutatis ſignis, ſcilicet $+12ab - 4bb$ ſcripto infra quantitatem A, factaque reductione harum duarum quantitatum, reductio B reperitur æqualis zero; id, quod indicat, propoſitam quantitatem eſſe quadratum, cujus radix eſt $3a - 2b$; ideoque $\sqrt{9aa - 12ab + 4bb} = 3a - 2b$.

Si habeatur aliqua reductio, quæ per duplum quotientis dividi nequeat, hoc indicabit, quantitatem propoſitam non eſſe quadratum, ideoque ſigno radicali erit afficienda. Sic v. c. ſi extra-

henda ſit radix quadrata ex $aa+bb$, reperietur quidem, a eſſe radicem ipſius aa; ſed cùm reductio bb per $2a$ nullo modo dividi poſſit, ſignum eſt, $aa+bb$ non eſſe quadratum: quare radix ita erit exprimenda $\sqrt{aa+bb}$. Quod & de aliis dicendum eſt.

Cæterum facile eſt cognoſcere ex poteſtatum formatione, vel ex habitudine, & uſu in calculo algebraico, num aliqua quantitas propoſita ſit quadratum, aut cubus, &c.; & conſequenter facile quoque eſt extrahere radicem vel ſine alicujus operationis adminiculo, vel per ſolam terminorum quantitatis propoſitæ inſpectionem.

63 Verùm & ſine his, quæ dicta ſunt, & ſine regularum traditarum adminiculo ſumma facilitate extrahi poſſunt omnia genera radicum, quadratarum, cubicarum, quadrato-quadratarum, &c. ſi nimirum ſervetur formula generalis *num.* 30. tradita. Nam ad hoc eo tantum modo conſiderandæ ſunt quantitates, ex quibus radix quæcunque extrahenda eſt, quo quantitates, quæ ſunt elevandæ ad eam poteſtatem, cujus exponens eſt idem cum exponente radicis, quæ extrahi debet, hoc eſt, quod hujuſmodi exponens ſit $\frac{2}{2}$, ſi radix extrahenda ſit quadrata, $\frac{3}{3}$ ſi cubica, $\frac{4}{4}$ ſi quadrato-quadrata, &c.: id, quod facile eſt, ſi nempe ſerventur, quæ *num.* 31. præſcripta ſunt, ut in ſequentibus exemplis videre eſt.

EXEMPLUM I.

Sit quantitas $a^3-3aab+3abb-b^3$, ex qua extrahenda ſit radix cubica, ſeu, quod idem eſt, quæ elevanda ſit ad poteſtatem $\frac{3}{3}$.

Ponantur $a^3=p$, & $-3aab+3abb-b^3=q$, poſitiſque valoribus literarum p, & q in duobus primis terminis $p^{\frac{m}{n}}+mp^{\frac{m-n}{n}}q$ formulæ generalis *num.* 30. propoſitæ (nam alii termini ſunt inutiles, cum radices extrahendæ ſint rationales) habebitur $a^{\frac{3m}{3}}+ma^{\frac{3m-3}{3}}x-3aab+3abb-b^3$; & poſito $m=\frac{n}{3}$, habebitur $a^{\frac{n}{3}}+\frac{n}{3}a^{\frac{n-3}{3}}x-3aab+3abb-b^3$, ſeu $a^{\frac{n}{3}}+\frac{n}{3}a^{\frac{-2+3}{3}}b+a^{\frac{-4+3}{3}}bb-\frac{n}{3}a^{\frac{-2+3}{3}}b^3$. Sed quoniam ſecundus terminus $-a^{\frac{-2+3}{3}}b=-a^0b=1b=b$, tertius, & quartus terminus nulli ſunt: ideo habe-

tur

tur $a-b$ pro quæsita radice, hoc est $\sqrt[3]{a^3-3aab+3abb-b^3}=a-b$, vel $\sqrt[3]{a^3-3aab+3abb-b^3}=a-b$.

EXEMPLUM II.

Sit quantitas $aa+2ab-2ac+bb-2bc+cc$, ex qua extrahenda sit radix quadrata, seu, quæ sit elevanda ad potestatem $\frac{1}{2}$.

Ponantur aa, vel $a^2=p$, & $+2ab-2ac+bb-2bc+cc=q$; positisque valoribus litterarum p, & q in duobus primis terminis formulæ $p^{\frac{m}{m}}+mp^{\frac{m-1}{m}}q$, habebitur $a^{\frac{2m}{2m}}+ma^{\frac{2m-2}{2m}}\times 2ab-2ac+bb-2bc+cc$; vel, posito $m=\frac{1}{2}$, habebitur $a^{\frac{1}{1}}+\frac{1}{2}a^{\frac{1-2}{1-2}}\times 2ab-2ac+bb-2bc+cc$, seu $a+a^{\frac{1-2+1}{1-2}}b-a^{\frac{1-2+2}{1-2}}c+\frac{1}{2}a^{\frac{1-2}{1-2}}bb-a^{\frac{1-2}{1-2}}bc+\frac{1}{2}a^{\frac{1-2}{1-2}}cc$: sed quoniam secundus, & tertius terminus evadunt $+b$, & $-c$; sequitur, omnes alios terminos, in quibus b, & c reperiuntur, esse nullos; ideoque $\sqrt{a^2+2ab-2ac+bb-2bc+cc}$, seu $\sqrt[2]{a^2+2ab-2ac+bb-2bc+cc}=a+b-c$.

EXEMPLUM III.

Sit quantitas $9aa+12ab+4bb$, ex qua extrahenda sit radix quadrata, seu quæ elevanda sit ad potestatem $\frac{1}{2}$.

Ponantur $9aa$, vel $9a^2=p$, & $+12ab+4bb=q$, positisque valoribus litterarum p, & q in duobus primis terminis formulæ $p^{\frac{m}{m}}+mp^{\frac{m-1}{m}}q$, habebitur $9^{\frac{m}{m}}a^{\frac{2m}{2m}}+m9^{\frac{m-1}{m}}a^{\frac{2m-2}{2m}}\times 12ab+4bb$; sive posito $m=\frac{1}{2}$, habebitur $9^{\frac{1}{1}}\times a^{\frac{2}{2}}+\frac{1}{2}\times 9^{\frac{1-1}{1}}a^{\frac{2-2}{2}}\times 12ab+4bb$, vel $9^{\frac{1}{1}}a+\frac{1}{2}\times 9^{\frac{1-1}{1}}a^{\frac{2-2}{2}}\times 12ab+4bb$, sed $9^{\frac{1}{1}}$, seu $\sqrt{9}=3$. Ergo $3a+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a^{\frac{1-2}{1-1+1}}\times 12ab+4bb$, vel $3a+\frac{1}{4}a^{\frac{1-2}{1-1}}\times 12ab+4bb$, vel $3a+\frac{1}{2}a^{\frac{1-1}{1-1}}b+\frac{1}{4}a^{\frac{1-1}{1-1}}bb$, vel $3a+\frac{2}{4}a^{\frac{1}{1}}b+\frac{2}{4}a^{\frac{1-1}{1-1}}bb$, vel $3a+2ab+$

$\frac{2-1}{2}a \times bb$: ſed ſecundus terminus $2a^{0}b = 2b$. Quare hic ſecundus terminus eſt ultimus, & tertius eſt nullus; ideoque $\sqrt{9aa + 12ab + bb}$, ſeu $\sqrt{9aa + 12ab + 4bb} = 3a + 2b$.

ADNOTATIO.

64 SI in aliquo termino valor ipſius m exponentis litteræ p non reperiretur $= 0$, radix quantitatis propoſitæ eſſet irrationalis, & extractio ad infinitum continuari poſſet, id, quod radicum approximatio dicitur, ſed hoc neceſſum non eſt pro applicatione Algebræ ad Geometriam; nam cùm radix alicujus quantitatis eſt irrationalis, ſat eſt, eam exprimi per ſignum radicale ipſi conveniens, uti & jam ſuprà dictum eſt, & deinceps viden potent

Ut certò conſtet, num rectè extracta ſit aliqua radix, juvat eam ad ſuam poteſtatem elevare, nam ſi provenit quantitas propoſita, probè facta erit extractio. Reperiatur $\sqrt{\ } 3a + 2b$ pro radice quadrata quantitatis $9aa + 12ab + 4bb$, ſi ex ductu $3a + 2b$ in $3a + 2b$ proveniat $9aa + 12ab + 4bb$, ſcilicet quantitas propoſita, ſignum erit, rectè extractionem factam eſſe.

REDUCTIO

Quantitatum irrationalium ad ſuas ſimpliciores expreſſiones.

65 DAntur quantitates complexæ, ſicut & incomplexæ, ex quibus exactè radix quæſita extrahi nequit; verùm ſæpe contingit, has quantitates eſſe productum ejus poteſtatis, cujus radix eſt extrahenda per aliquam aliam quantitatem, & tum radix ex parte extrahi poteſt ponendo ante ſignum radicale radicem hujus poteſtatis, & aliam quantitatem, quæ ſupereſt, poſt idem ſignum. Sic $\sqrt{\ } c$ manifeſtum eſt, $aab + aac$ non eſſe quadratum, & conſequenter radicem quadratam extrahi non poſſe, niſi præpoſito ſigno radicali hoc modo $\sqrt{aab + aac}$: at paret quoque, $aab + aac$ eſſe productum ex aa, quod eſt quadratum in $b + c$, ſeu $\sqrt{aab + aac} = \sqrt{aa} \times \sqrt{b + c}$ atqui $\sqrt{aa} = a$.

Ergo

Ergo $\sqrt{aab+aac} = a \times \sqrt{b+c} = a\sqrt{b+c}$; & hoc illud eſt, quod dicitur, extrahere radicem ex parte, vel potius id, quod dicitur, reducere quantitatem irrationalem ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem, quod quidem ſemper, cùm fieri poteſt, præſtandum eſt, ſive quantitates ſint complexæ, ſive incomplexæ

Cùm ex ſola terminorum inſpectione non innotuerit, an aliqua quantitas irrationalis complexa, vel incomplexa reduci queat ad ſimpliciorem expreſſionem, examinanda erit inquirendo (*num* 56, vel 57) omnes diviſores, qui illam exactè poſſint dividere. ſi reperiatur aliquis, qui ſit poteſtas ejuſdem nominis, ac radix extrahenda, quantitas propoſita reduci poterit ad ſimpliciorem expreſſionem, conſiderari enim poterit tanquam productum hujus poteſtatis, & quotientis reſultantis ex diviſione ipſius quantitatis per eandem poteſtatem. Ut ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$, inventis omnibus diviſoribus hujus quantitatis, reperietur, quadratum $aa - 2ab + bb$ eſſe unum diviſorem, per quem ſi dividatur quantitas $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$, proveniet quotiens $a-b$, ideoque $\sqrt{a^3-3aab+3abb-b^3} = \sqrt{aa-2ab+bb} \times \sqrt{a-b}$; atqui $\sqrt{aa-2ab+bb} = a-b$. Ergo $\sqrt{a^3-3aab+3abb-b^3} = a-b\sqrt{a-b}$.

Quando plures reperientur diviſores, qui ſint poteſtates ejuſdem nominis, cujus ſunt radices extrahendæ, non niſi maximo erit utendum.

66 Quantitates irrationales adduntur, ſubducuntur, multiplicantur, & dividuntur, uti rationales, & hæ quatuor operationes eodem pacto in illis, & in iſtis fiunt. ſed ut id expeditiùs fiat, priùs ad ſuas ſimpliciores expreſſiones ſunt reducendæ, & ſicuti quantitates irrationales a rationalibus non differunt niſi ſigno radicali, quod ita afficit eas, quæ ſunt poſt ſignum, ut licet continerent eaſdem literas, quas continent, quæ ſunt ante ſignum, non ideo tamen forent ſimiles, ita quantitates, quæ ſunt extra ſignum radicale, nullo unquam pacto in aliqua ex his quatuor operationibus cum iis, quæ ſunt ſub ſigno radicali, debent commiſceri.

Obſervandum tamen, quantitates irrationales ſimiles eſſe, cùm illæ, quæ ſunt ſub ſignis radicalibus, nihil omnino inter ſe differunt, & cùm illæ, quæ ſunt extra ſigna radicalia, ſunt omnino eædem, vel ſaltem non niſi ſecundum coefficientes differunt.

runt. Sic $3a\sqrt{a}$, & $2a\sqrt{a}$; $3a\sqrt{a+b}$, & $a\sqrt{a+b}$. $\frac{4}{5}\sqrt{ax-xx}$, & $\frac{3d}{f}\sqrt{ax-xx}$ ſunt quantitates irrationales ſimiles, ſuppoſito tamen, ſignum radicale eſſe idem: quod ſemper ſervatur] in algebræ ad geometriam applicatione.

ADDITIO

Quantitatum irrationalium.

67 SCribantur quantitates una poſt aliam, vel una infra aliam ſingulæ cum ſuis ſignis, &, ſi quæ ſunt ſimiles, reducantur (*num.* 11) perinde ac ſi quantitates rationales forent. Sic ut addatur $2a\sqrt{b}$ ipſi $3a\sqrt{b}$, ſcribatur $2a\sqrt{b}+3a\sqrt{b}$, & reducitur ad $5a\sqrt{b}$ ut $3a\sqrt{b}$ ipſi $2c\sqrt{b}$ ſcribatur $3a\sqrt{b}+2c\sqrt{b}$, vel $3a+2c\sqrt{b}$, utroque enim modo uti potes in hujuſmodi quantitatibus. ut $a\sqrt{ax-xx}$ ipſi $b\sqrt{ax-xx}$, ſcribatur $a\sqrt{xx-xx}+b\sqrt{ax-xx}$, vel $a+b\sqrt{ax-xx}$ ut $3a\sqrt{b}$ ipſi $2c\sqrt{d}$, ſcribatur $3a\sqrt{o}+2c\sqrt{d}$, neque enim aliam expreſſionem hujuſmodi quantitates admittere poſſunt.

SUBDUCTIO

Quantitatum irrationalium.

68 SCribantur quantitates una poſt aliam, vel una infra aliam, mutatis ſignis earum, quæ debent ſubduci, & ſi ſimiles ſint, fiat (*num.* 11) reductio, ut in quantitatibus rationalibus. Sic ut ſubtrahatur $3a\sqrt{b}$ ex $5a\sqrt{b}$, ſcribatur $5a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}$, quæ quantitas reducitur ad $2a\sqrt{b}$ ut $3a\sqrt{2b}$ ex $5b\sqrt{2b}$, ſcribatur $5b\sqrt{2b}-3a\sqrt{2b}$, ſeu $5b-3a\sqrt{2b}$: ut $-2b\sqrt{ax-xx}$ ex $3b\sqrt{ax-xx}$ ſcribatur $3b\sqrt{ax-xx}+2b\sqrt{ax-xx}$, reducitur ad $5b\sqrt{ax-xx}$: ut $2c\sqrt{d}$ ex $3a\sqrt{b}$, ſcribatur $3a\sqrt{o}-2c\sqrt{d}$, cùm alia expreſſio nequeat haberi.

MUL-

MULTIPLICATIO

Quantitatum irrationalium.

69 SI quantitates multiplicandæ ſunt incomplexæ, ducatur pars rationalis in rationalem, & pars irrationalis in irrationalem; deinde productum quidem partium rationalium ante ſignum radicale, productum verò partium irrationalium poſt idem ſignum radicale ſcribatur, tandem totale productum ad ſuam ſimpliciorem reducatur expreſſionem. Sic $a\sqrt{b} \times c\sqrt{c} = ac\sqrt{bc}$; ſed $\sqrt{bb} = b$. Ergo $ac\sqrt{bb} = abc$. Ex quo appareat, cùm partes irrationales ſunt ſimiles, multiplicandum tantùm eſſe productum partium rationalium per id, quod ſub ſigno radicali reperitur: ſimiliter $a\sqrt{b} \times \sqrt{c}$, ſeu $a\sqrt{\ } \times 1\sqrt{c}$ (ſumitur enim unitas pro parte rationali, cùm nulla alia quantitas adeſt) $= a\sqrt{bc}$; & $2a\sqrt{c} \times 3b\sqrt{c}$, vel $2a\sqrt{1} \times 3b\sqrt{1} = 6ab\sqrt{b}$: & $2a\sqrt{bc} \times b\sqrt{ac} = 2ab\sqrt{abbc} = 2abb\sqrt{ac}$. & $2a\sqrt{3bc} \times 3b\sqrt{6ab} = 6ab\sqrt{18abbc} = 18abb\sqrt{2ac}$. & $a\sqrt{2b} \times 2b\sqrt{3c} = 2ab\sqrt{6bc}$. & $\sqrt[3]{ab} \times \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{aabb}$. & $2a\sqrt[3]{ab} \times 3b\sqrt[3]{aa} = 6ab\sqrt[3]{a^3b} = 6aab\sqrt[3]{b}$, &c.

70 Si quantitates multiplicandæ ſunt complexæ, ducantur ſinguli termini unius per ſingulos alterius, juxta regulas quantitatum incomplexarum, factaque reductione productorum particularium, habebitur productum totale. Sic $\sqrt{aa+bb} \sqrt{aa+bb} = aa+bb$. & $\sqrt{aa-bb} \times -\sqrt{aa-bb} = -aa+bb$. & $2a\sqrt{aa+bb} \times b\sqrt{aa+bb} = 2a^2b+2ab^2$, id, quod evidens eſt: nam cùm eadem quantitas reperitur ſub ſigno radicali $\sqrt{\ }$, dempto ſigno radicali, hæc quantitas reperitur ducta in ſeipſam. Quod etiam hoc modo probari poteſt: $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb} = \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}} \times \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}} = (num\ 34)\ \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, vel $(num\ 33)\ \overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}\times 2} = aa+bb$, & ſic de aliis.

Ut ducatur $\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b}$, multiplicetur $a+b$ per $a-b$, perinde ac ſi forent quantitates rationales, habebiturque $\sqrt{aa-bb}$: pariter $a+\sqrt{ab} \times b = ab+b\sqrt{ab}$. & $a+\sqrt{ab} \times \sqrt{ac} = a\sqrt{bc}+\sqrt{abbc} = a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}$. & $3a\sqrt{6c} - 2b\sqrt{ac} \times 2c\sqrt{ab} =$

$6ac\sqrt{abbc} - 4bc\sqrt{aabc} = 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$. Sequuntur exempla magis compoſita.

$a + \sqrt{aa - bb}$ multiplicatum

per $a + \sqrt{aa - bb}$

$aa + a\sqrt{aa - bb}$

$+ a\sqrt{aa - bb} + aa - bb$

producit $aa + 2a\sqrt{aa - bb} + aa - bb$

$a + \sqrt{aa - xx}$ multiplicatum

per $a - \sqrt{aa - xx}$

$aa + a\sqrt{aa - xx}$

$- a\sqrt{aa - xx} - xx + aa + xx$

producit $aa \quad 0 \quad - aa + xx$

$\sqrt{ab} + \sqrt{aa - xx}$ multiplicatum

per $\sqrt{ab} + \sqrt{aa - xx}$

$ab + \sqrt{a^3b - abxx}$

$+ \sqrt{a^3b - abxx} + aa - xx$

producit $ab + 2\sqrt{a^3b - abxx} + aa - xx$

$ac + b\sqrt{aa - xx}$ multiplicatum

per

per $\frac{bc - cv\sqrt{aa - yy}}{abc + bcv\sqrt{aa - xx} - acv\sqrt{aa - yy} - bcv\sqrt{a^4 - aaxx - aayy + xxyy}}$

producit $\frac{abc + bcv\sqrt{aa - xx} - acv\sqrt{aa - yy} - bcv\sqrt{a^4 - aaxx - aayy + xxyy}}{\}}$.

DIVISIO

Quantitatum irrationalium.

71 SCribatur dividendum infra divisorem in modum fractionis; eritque hæc fractio quotiens divisionis, sed cùm innotuerit, id, quod proponitur dividendum, esse productum divisoris per aliam quantitatem, quod in quantitatibus incomplexis cernere facile est; tum hæc alia quantitas accipiatur pro quotiente. In quantitatibus verò complexis, cùm quotiens non innotuerit, examinandum erit (*num.* 46) num divisio fieri possit; quæ si peragi queat, habebitur quotiens carens fractione; sin verò, standum erit divisioni indicatæ. Sic $\frac{y ab}{y a} = b$; & $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$; & $\frac{\sqrt[3]{aac}\sqrt[3]{bbc}}{\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{ab}} = \sqrt[3]{abc}$; & $\frac{\sqrt{aa - xx}}{\sqrt{a + x}} = \sqrt{a - x}$; nam $a + x \times a - x = aa - xx$, &c.

Dantur aliæ reductiones pro divisionibus indicatis, quæ alibi occurrent. & quidquid a nobis dicendum est de habitudinibus, & de fractionibus, idipsum intelligendum quoque est de hujusmodi divisionibus, sive illæ sint rationales, sive irrationales.

THEORIA

Rationum, seu Habitudinum, Fractionum, Æquationum, & Proportionum.

DEFINITIONES.

I. RAtio, sive habitudo est duarum ejusdem generis magnitudinum comparatio, ejusmodi sunt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo corpora, duo spatia temporis, duæ quantitates motus, duæ velocitates vel ejusdem, vel duorum differentium mobilium, duo pondera, duo soni, &c.

Porro comparare magnitudines est operari super magnitudinibus; & sicuti super magnitudinibus operari non possumus, nisi illas addendo, subducendo, multiplicando, dividendo, radicesque ex iis extrahendo, ita necessum est, earum comparationem per aliquam ex his operationibus fieri.

Sed quoniam Additio, & Multiplicatio illas confundunt, neque æqualitatem, vel inæqualitatem indicant, in quo præcisè comparatio consistit, & radicum Extractio non nisi in unica tantùm magnitudine exerceatur; contra verò quoniam Subductio indicat æqualitatem duarum magnitudinum, vel excessum unius supra aliam, seu differentiam unius ab alia, & Divisio determinat quoties una magnitudo contineat, vel contineatur in alia, vel, quod idem recidit, ostendit modum, quo una magnitudo contineat, vel contineatur in alia, seu indicat æqualitatem; ideo sequitur, subductionem, & divisionem duntaxat magnitudinum comparationi posse inservire.

1 Comparatio duarum magnitudinum per subductionem, seu, quod idem est, ipsa subductio dicitur ratio, vel habitudo *arithmetica*. Sic $12-4$, & $a-b$, vel $b-a$, &c. sunt rationes, seu habitudines arithmeticæ.

2 Comparatio duarum magnitudinum per divisionem, seu, quod idem est, ipsa divisio appellatur ratio, seu habitudo *geometrica*. Sic $\frac{12}{4}$, seu $\frac{4}{12}$, & $\frac{a}{b}$, seu $\frac{b}{a}$ sunt rationes, seu habitudines geometricæ.

Sub-

Subductio hic indicata ſumitur pro ipſa ſubductione, ſeu pro differentia duarum magnitudinum, quæ illam componunt. ſimiliter Diviſio hic indicata accipitur pro ipſa diviſione, ſeu pro quotiente duarum quantitatum, quæ illam formant.

Nomine *reductionis* deinceps appellabitur id, quod reſultat ex his duabus regulis, ſeu ex his duabus habitudinibus, hoc eſt, differentia, & quotiens duarum quantitatum, quæ illas conſtituunt.

COROLLARIUM I.

3 MAniſeſtum eſt, rationes, ſeu habitudines tam arithmeticas, quàm geometricas eſſe æquales, cùm earum reductiones ſunt æquales. Sic $12-4=16-8$, nam $12-4=8$, & $16-8=8$. ſimiliter $\frac{12}{4}=\frac{8}{2}$, cùm $\frac{12}{4}=3$, & $\frac{8}{2}=3$, ob eandem rationem ſi $\frac{a}{b}=f$, & $\frac{c}{d}=f$, habebitur $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Verùm reductiones, ſeu quotientes diviſionum, vel habitudinum geometricarum ſunt ſemper æquales, quoties dividenda æquè contineant, vel contineantur in ſuis diviſoribus. Quocirca cùm una magnitudo a ita continebit, vel continebitur in alia magnitudine b, ut alia tertia c continet, vel continetur in altera quarta d, hæ quatuor magnitudines ſemper efficient duas habitudines geometricas æquales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

COROLLARIUM II.

5 CLarum ſimiliter eſt, rationes, & habitudines tam arithmeticas, quàm geometricas eſſe inæquales, cùm earum reductiones ſunt inæquales; eamque majorem eſſe, cujus reductio major eſt. Sic $12-4>10-6$, nam $12-4=8$, & $10-6=4$; pariter $\frac{12}{4}>\frac{10}{4}$, cum $\frac{12}{4}=3$, & $\frac{10}{4}=2$.

6 Primus terminus habitudinis arithmeticæ, & terminus ſuperior habitudinis geometricæ dicitur *Antecedens*; ſecundus verò habitudinis arithmeticæ, & inferior habitudinis geometricæ vocatur *Conſequens*. Sic in habitudinibus $a-b$, & $\frac{c}{d}$, a eſt antecedens, & b conſequens: ſed quoniam rationes, ſeu habitudines geometricæ nihil aliud ſunt, quàm diviſiones indicatæ, & hæ diviſiones, propriè loquendo, ſunt fractiones, fit inde,

inde, ut nihil discriminis inter rationem, habitudinem, divisionem, & fractionem intercedat; ita ut quidquid deinceps de una dicetur, de aliis quoque id dictum existimandum sit. Notandum duntaxat, ut communis dicendi modus retineatur, vocari duos terminos, cùm agetur quidem de rationibus, sive habitudinibus *antecedentem*, & *consequentem*, cùm autem de divisionibus, *dividendum*, & *divisorem*, cùm verò de fractionibus, *numeratorem*, & *denominatorem*.

7 Cùm antecedens alicujus rationis æquatur suo consequenti, appellatur *ratio æqualitatis*; cùm verò alter alterum excedit, dicitur *ratio inæqualitatis*.

8 Cùm antecedens unius habitudinis geometricæ continet pluries exactè suum consequentem, ille dicitur *multiplex* hujus consequentis; & cùm contra antecedens pluries exactè continetur in suo consequenti, vocatur *submultiplex* ejusdem consequentis.

9 Ex hujusmodi habitudinibus desumitur denominatio, quæ indicatur, quoties antecedens suum consequentem contineat, vel in eo contineatur, ita ut si antecedens contineat suum consequentem bis, ter, quater, &c, habitudo dicatur *dupla*, *tripla*, *quadrupla*, &c & si contra antecedens contineatur bis, ter, quater, &c in consequenti, habitudo appelletur *subdupla*, *subtripla*, *subquadrupla*, &c. Sic $\frac{2}{1}$ est habitudo tripla, & $\frac{1}{3}$ subtripla.

10 Appellantur *æquatio* duæ quantitates algebricæ, inter quas reperitur signum æqualitatis $=$. Sic $a=b$; & $ax-xx=yy$, & $x=\frac{2b}{c}$ sunt æquationes.

11 Duæ illæ quantitates algebricæ, quæ sunt hinc, & illinc respectu signi æqualitatis, vocantur *membra* æquationis, ea quidem, quæ illud præcedit, primum membrum, quæ verò sequitur, secundum membrum appellatur. Ex quo apparet, duo membra alicujus æquationis esse expressiones algebricas unius ejusdem quantitatis, vel duarum quantitatum æqualium.

COROLLARIUM.

12 PAtet, duas habitudines arithmeticas, vel geometricas æquales semper efformare posse æquationem. Sic si a æquè superet, vel superetur a b, ac c superat, vel superatur

tur a *d*; ſemper erit $a-b=c-d$, vel $b-a=d-c$. Pari ratione ſi *a* eodem modo contineat, vel contineatur in *b*, quo *c* continet, vel continetur in *d*, ſemper habebitur $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, vel $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

13 Sed ſi loco efformandi æquationem duarum habitudinum arithmeticarum, vel geometricarum, diſponantur earum quatuor termini, ita ut antecedens unius ex habitudinibus ſit primus terminus, & ejus conſequens ſecundus. & antecedens alterius habitudinis tertius, ejuſque conſequens quartus, ſegregando duas habitudines per quatuor puncta, & duos utriuſque habitudinis terminos per unicum tantùm punctum, hoc modo, *a*.*b*.:*c*.*d* (ſupponendo tamen, $a-b=c-d$, vel $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$) hujuſmodi diſpoſitio quatuor terminorum duarum habitudinum æqualium, *proportio*, ſive *analogia* appellabitur. adeo ut proportio, ſive analogia nihil aliud ſit, quàm æqualitas duarum habitudinum, aliter quàm in æquatione diſpoſitarum. Si habitudines fuerint arithmeticæ, *proportio arithmetica* vocabitur, ſi geometricæ, *proportio geometrica*.

14 Ut enuncietur aliqua proportio, puta, quæ ſequitur. *a*.*b*::*c*.*d*, dicatur, ſi ſit arithmetica. *a* ita ſuperat *b*, vel ſuperatur a *b*, ut *c* ſuperat *d*, vel ſuperatur a *d*; ſi verò ſit geometrica, dicatur. *a* ita continet *b*, vel continetur in *b*, ut *c* continet *d*, vel continetur in *d*; ſed brevitatis ergo, ſive proportio ſit arithmetica, ſive geometrica, dicatur. *a* eſt ad *b*, ut *c* eſt ad *d*, vel ut *a* eſt ad *b*, ita *c* eſt ad *d*: obſervandum tamen, quòd nihilominus vox *eſt* ſignificat *ſuperat*, vel *ſuperatur* in proportione arithmetica, & *continet*, vel *continetur* in geometrica.

Proportio ſive geometrica ſit, ſive arithmetica, duplex eſt, *diſcreta*, & *continua*.

15 Proportio diſcreta eſt, in qua quatuor termini ſunt differentes, ut hæc, *a*.*b*::*c*.*d*.

16 Proportio continua eſt, in qua idem terminus eſt conſequens reſpectu primæ habitudinis, & antecedens reſpectu ſecundæ, ut iſta, *a*.*b*::*b*.*c*.

17 Quantitates, quæ proportionem componunt, *proportionales* nominantur. Sic proportio diſcreta quatuor continet proportionales, continua verò tres tantùm: & illa, quæ media eſt, dicta-

dicitur *media proportionalis* arithmetica, ſive geometrica, ſecundum quod proportio arithmetica, vel geometrica eſt; & in utraque proportione primus, & ultimus terminus dicuntur *extrema*, duo verò medii, *media*.

18 Cùm proportio continua plures continet terminos, quàm tres, vel potius cùm plures magnitudines, quarum numerus excedit 3, ita ſunt, una poſt aliam, diſpoſitæ, ut earum quævis poſſit eſſe conſequens reſpectu ejus, quæ præcedit, & antecedens reſpectu ejus, quæ ſequitur, hæc magnitudinum diſpoſitio appellatur *progreſſio* arithmetica, vel geometrica, ſecundum quod habitudines, quas habent inter ſe magnitudines, quæ illam componunt, ſunt arithmeticæ, vel geometricæ Sic A. B. C. ſunt progreſſiones arithmeticæ, & D. E. F. ſunt progreſſiones geometricæ.

A	1. 2. 3. 4. 5, &c.	D	1. 2. 4. 8. 16, &c
B	10. 8. 6. 4. 2, &c.	E	81. 27. 9. 3. 1, &c
C	4. 2. 0 — 2 — 4, &c.	F	4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$, &c

COROLLARIUM I.

19 NOtum eſt (*num.* 18) in progreſſione arithmetica, exceſſum unius termini cujuſcunque ſupra illum, qui vel ſequitur, vel præcedit, ſemper eundem eſſe debere, adeo ut ſi primus terminus progreſſionis arithmeticæ vocetur *a*, & exceſſus, qui in illa progreſſione dominatur, ſit *m* (*m* ſignificare poteſt quemvis numerum integrum, vel fractum, poſitivum, vel negativum) beneficio harum duarum litterarum efformari poſſit progreſſio arithmetica generalis, hoc modo, *a* . *a* + *m* . *a* + 2*m* . *a* + 3*m*, &c.

COROLLARIUM II.

20 INnoteſcit pariter, ſi in progreſſione geometrica unus terminus quicunque dividatur per illum, qui ſequitur, reductionem, ſeu quotientem eundem ſemper eſſe debere; ideoque ſi primus progreſſionis geometricæ terminus ſit *b*, & reductio, ſeu quotiens, qui in illa progreſſione regnat, ſit *n* (*n* ſignificat numerum poſitivum integrum, vel fractum) efformari

formari poterit progressio geometrica generalis hac ratione, $b . \frac{b}{n} . \frac{b}{n^2} . \frac{b}{n^3}$, &c; nam si quantitas b per aliam quantitatem divisa dat pro quotiente n, eadem quantitas b divisa per quotientem n illam aliam dabit quantitatem.

21 Hoc, quod dictum est, progressionibus tam arithmeticis, quàm geometricis applicari potest. Sit v. c. sequens proportio arithmetica $a . b :: c . d$; si $m - b$, vel $b - a$ nominetur m, etiam $c - d$, vel $d - c$ erit m. Ergo $a . a - m :: c . c - m$; vel $a . a + m :: c . c + m$: ex quo apparet, summam extremorum mediorum summæ æquari, hoc est, $a + c \pm m = a \pm m + c$, siquidem hæ duæ summæ, quæ sunt duo membra hujus æquationis, easdem continent quantitates.

22 Similiter si in sequenti progressione geometrica $a . b :: a . d$ ponatur $\frac{a}{b} = n$, etiam $\frac{a}{d}$ erit $= n$, ideoque (*num.* 20.) $a . \frac{a}{n} :: c . \frac{c}{n}$; ex quo itidem apparet, extremorum producto productum mediorum æquale esse, hoc est, $\frac{ac}{n} = \frac{ac}{n}$; namque hæc duo producta, quæ sunt duo membra hujus æquationis, easdem continent quantitates.

AXIOMA I.

23 Si addantur, vel subducantur, vel multiplicentur, vel dividantur quantitates æquales per æquales quantitates, summæ, seu differentiæ, seu producta, seu quotientes erunt æquales.

COROLLARIA.

I. Colligitur, duo alicujus æquationis membra addi, subtrahi, multiplicari, vel dividi posse per duo alterius æquationis membra, singula singillatim. Ut si $a = b$, & $c = d$, erit etiam $a \pm c = b \pm d$, vel $a \pm d = b \pm c$; & $ac = bd$, vel $ad = bc$; & $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, vel $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$.

II. Sequitur etiam ex hoc axiomate, & ex eo, quòd Additio, & Subductio contrarios habent effectus, transferri posse quem placuerit terminum alicujus membri æquationis ad aliud membrum, si ejus signum mutetur, id, quod *transpositio* dici-

dicitur, nec non eadem ratione transferri posse omnes alterutrius membri terminos ad aliud membrum, id, quod dicitur *æquare totum zero*. Sic hæc æquatio $a+b-c=g$ potest in hanc mutari $a+b=g+c$; vel in hanc $a=g+c-b$, vel in hanc $a+b-c-g=0$, vel $0=g-a-b+c$. nam v. g. in primâ mutatione nihil aliud efficitur, quàm quòd additur c in utraque parte signi æqualitatis, cùm a primo membro c sit subductum, ideoque habetur $a+b-c+c=g+c$, reduciturque ad $a+b=g+c$, quod & de aliis mutationibus dicendum est.

III. Infertur ex hoc corol. mutari posse omnia signa unius æquationis, ad hoc enim nihil aliud opus est, quàm transferre omnes unius membri terminos ad aliud membrum, & retinere in alterutro membrorum terminos quoscunque cum signis, quæ magis arrident.

IV. Sequitur etiam ex eodem axiomate, & ex eo, quòd divisio destruit id, quod efficit multiplicatio, & e contra, liberari posse aliquam æquationem ab omnibus fractionibus, quæ reperiri possunt: namque sufficit ducere totam æquationem in denominatores omnes unum post alium, seu, quod eodem tendit, ducere semel illam in productum omnium denominatorum, & deinde reducere (*art. 1. num* 37) terminos fractionarios. Sic ut tollantur fractiones ex hac æquatione $\frac{abx}{c}+gx=\frac{bcd}{e}$, multiplicanda erit primò æquatio per c, deinde per e, vel semel per ce, & habebitur $\frac{aebcx}{c}+egcx=\frac{ebcd}{e}$: sed (*art. 1. num.* 37) $\frac{aebcx}{c}=aebx$, & $\frac{ebcd}{e}=bcd$. Ergo $aebx+egcx=bcd$, quæ omni fractione caret.

Expeditior redditur operatio, præcipuè cùm denominatores sunt polynomii, si numeratores terminorum fractionariorum minimè mutati scribantur, & reliqui termini per denominatores multiplicentur. Sic ut auferatur fractio hujus æquationis $\frac{xx-aa}{b-y}=c$, ducatur c in $b-y$, habebiturque $xx-aa=bc-cy$, &c.

V. Colligitur ulteriùs, liberari posse aliquam litteram, vel aliquam potestatem quamcunque ejusdem litteræ, quæ in aliqua æquatione ponitur, ab omnibus aliis quantitatibus, quæ eam multiplicant, id, quod dicitur *invenire valorem alicujus litteræ, vel alicujus potestatis*. ad hoc enim satis est dividere totam æquationem per quantitates, quæ hanc litteram multiplicant, transpo-

poſitis tamen prius in uno membrorum omnibus terminis, in quibus eadem hæc littera reperitur, in alio verò membro omnibus reliquis, deinde autem facere reductionem. Ut ſi in hac æquatione $ax = bc$ in animo ſit habere duntaxat x in primo membro, id fiet, ſi tota æquatio dividatur per a, ſc. $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$: ſed (*art.* 1 *num.* 37) $\frac{ax}{a} = x$. Ergo $x = \frac{bc}{a}$: ſecundum membrum diviſionem non patitur.

Si in hac $ax = ab + bx - bc$ habendum ſit tantùm x in altero membrorum, id fiet reponendo omnes terminos, in quibus ineſt x, ad unam partem, hoc modo, ſi a ponatur excedere b, $ax - bx = ab - bc$, & dividendo utrumque membrum per $a - b$, habebitur $\frac{ax - bx}{a - b} = \frac{ab - bc}{a - b}$: ſed (*art.* 1. *num* 43. vel 46.) $\frac{ax - bx}{a - b} = x$. Ergo $x = \frac{ab - bc}{a - b}$.

Si in hac $ax - bx = aa - bb$ ſolùm x eſſe debeat ex una parte, dividatur tota æquatio per $a - b$, fietque $\frac{ax - bx}{a - b} = \frac{aa - bb}{a - b}$; ſed (*art.* 1. *num* 46.) $\frac{ax - bx}{a - b} = x$, & $\frac{aa - bb}{a - b} = a + b$. Ergo $x = a + b$.

Si in hac $aaxx + aayy - 2ax^3 - 2axyy + xxyy = 0$ haberi oporteat tantùm yy in primo membro, fiat priùs tranſpoſitio, ſcilicet $aayy - 2axyy + xxyy = 2ax^3 - aaxx$, deinde dividatur quodvis membrum per $aa - 2ax + xx$, & habebitur $yy = \frac{2ax^3 - aaxx}{aa - 2ax + xx}$, &c.

AXIOMA II.

24. POteſtates, & radices quantitatum æqualium ſunt æquales.

Sic ſi $x = \pm a$, etiam quadrando quodvis membrum habebitur $xx = aa$; & ſi $xx = aa$, radices erunt $x = \pm a$; & ſi $xx = ab$, radices erunt $x = \pm \sqrt{ab}$; & ſi $xx = -ab$, radices erunt $x = \pm \sqrt{-ab}$, quod dicitur radix *imaginaria*, quia nunquam ejus valor exprimi poteſt, hujuſmodi ſunt omnes quantitates irrationales negativæ.

Si $yy = \frac{2ax^3 - aaxx}{aa - 2ax + xx}$, radices erunt $y = \frac{\sqrt{2ax^3 - aaxx}}{\sqrt{aa - 2ax + xx}}$; ſed (*art.* 1.

num. 65.) $\sqrt{2ax^3 - 4axx} = x\sqrt{2ax - aa}$; & $\sqrt{aa - 2ax + xx} = a - x$. Ergo $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$.

Si $xx = ax + bb$, radices erunt $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, nam transponendo habetur $xx - ax = bb$, sed si (*art.* 1. *num.* 62.) extrahatur radix primi membri $xx - ax$, ei deesse reperietur $+\frac{1}{4}aa$, ad hoc ut sit quadratum perfectum: quare si hinc, & inde addatur $\frac{1}{4}aa$, habebitur $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$: sed $\sqrt{xx - ax + \frac{1}{4}aa}$ (*art.* 1. *num.* 62.) $= x - \frac{1}{2}a$; & radix secundi membri non potest extrahi, nisi per signum radicale. Ergo $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel transponendo $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. In hujusmodi operatione nullam mutationem afferrent signa, licèt essent diversa.

Ex eo autem, quòd potestates quantitatum æqualium sunt æquales, sequitur, liberari posse æquationem a quantitatibus irrationalibus, quibus sit immixta, quod dicitur, *efficere, ut evanescant signa radicalia*; siquidem, si una tantùm sit irrationalis quantitas, postquam per corol. præced. sola in uno membro habeatur, sat est elevare quodlibet membrum ad potestatem, quæ habeat eundem exponentem, quem signum radicale. Sic ut liberetur a quantitatibus irrationalibus hæc æquatio $xx = a - x \times \sqrt{xx + yy}$, id fiet dividendo per $a - x$, scilicet $\frac{xx}{a - x} = \sqrt{xx + yy}$, vel per $\sqrt{xx + yy}$, scilicet $\frac{xx}{\sqrt{xx + yy}} = a - x$; deinde quadrando singula membra proveniet $\frac{x^4}{xx + yy} = aa - 2ax + xx$, ubi nihil reperire est quantitatum irrationalium.

Quòd si reperiantur duæ quantitates irrationales in eadem æquatione, hæc prius ab una, deinde ab alia eximatur eo modo, quo dictum est. Sic ut liberetur ab irrationalibus quantitatibus hæc æquatio $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b$, id habebitur prius transponendo, scilicet $\sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b - \sqrt{xx + yy}$; deinde quadrando singula membra, scilicet $aa - 2ax + xx + yy = bb - 2b\sqrt{xx + yy} + xx + yy$, postea iterum transponendo, deletis tamen prius, quæ per reductionem destruuntur, scilicet $2b\sqrt{xx + yy} = bb - aa + 2ax$, denique rursus quadrando quodlibet membrorum, scilicet $4bbxx + 4bbyy = b^4 + 2aabb + a^4 + 4abbx - 4a^3x$

$4a^4x + 4aax$, ubi nulla amplius reperitur irrationalis quantitas.

AXIOMA III.

25 LOco alicujus quantitatis cujuſcunque incomplexæ, vel complexæ poni poteſt alia quantitas æqualis complexa, vel incomplexa, id, quod dicitur *ſubſtituere*. Ex hoc axiomate ſequitur, poſſe plures æquationes ad unam tantùm reduci, fierique, ut evaneſcant litteræ quæcunque, dummodo quælibet ex his litteris, aut aliqua ex ipſarum litterarum poteſtatibus inſit ſaltem in duabus ex his æquationibus, & ipſæ æquationes ſaltem una æquatione excedant litteras, quæ debent evaneſcere. Hujus rei hæc eſt methodus.

26 Eligatur una ex æquationibus (ſimpliciſſima plerunque), ſegregeturque ab aliis (*ax.* 1. *& ejus coroll.*) ea littera, quæ debet evaneſcere, in alterutro membrorum (in primo fere), deinde ſubſtituatur in aliis æquationibus pro hac littera, vel pro ſuis poteſtatibus ejus valor, vel valor ſuarum poteſtatum, qui reperitur in alio membro æquationis, quæ jam præparata eſt, ita ut hæc littera in nulla amplius æquatione inſit; & tum æquationes erunt una diminutæ. Eligatur rurſus ſimpliciſſima æquationum reſultantium, ſolaque ponatur in primo membro ea littera, quæ debet evaneſcere, ſubſtituaturque, uti ſupra, valor hujus litteræ in aliis æquationibus. Repetatur eadem operatio, donec una poſt aliam evaneſcant omnes litteræ, quas evaneſcere propoſitum erat, vel donec non niſi una habeatur æquatio. Hæc exemplis illuſtrare placet.

EXEMPLA.

1. SInt tres æquationes A, B, C, quarum duæ litteræ x, & y evaneſcere debent.

A $xz = yy$	D $xz = bb - 2bz + zz$
B $x + y = a$	E $x - b + z = a$
C $z + y = b$	F $xz + bz - zz = bb - 2bz + zz$
	G $2zz = 3bz + az - bb$

Eligatur æquatio C, ut evaneſcat y, fiat tranſponendo $y = b - z$, & quadrando ſingula membra (nam in æquatione A reperi-

peritur quadratum litteræ y) habetur $yy = bb - 2bz + zz$, & ſubſtituendo in æquatione A pro yy ejus valorem $bb - 2bz + zz$, & in æquatione B pro y ejus valorem $b - z$, habentur duæ æquationes D, & E, in quibus amplius y non eſt. Eligatur iterum æquatio E, ut evaneſcat x, fiat tranſponendo $x = a + b - z$, & ſubſtituendo in æquatione D loco x ejus valorem $a + b - z$, habetur æquatio F, hoc eſt, facta reductione, & tranſpoſitione, æquatio G, in qua nec x, nec y amplius reperiuntur.

11 Sint duæ æquationes $aa + 2ax + xx = 2yy + 2by + bb$, & $yy + by = aa + ax$, in quibus evaneſcere debeat y. In primis obſervandum, ſi ſecunda æquatio multiplicetur per 2, provenire $2yy + 2by = 2aa + 2ax$, ubi omnes termini, in quibus ineſt y, ſunt iidem, quí in primæ quare ſi in prima pro $2yy + 2by$, ſubſtituatur ejus valor $2aa + 2ax$ inventur in ſecunda per multiplicationem 2, habebitur $aa + 2ax + xx = 2aa + 2ax + bb$, hoc eſt, facta reductione, $xx = aa + bb$, &c.

27 Licebit etiam in aliqua æquatione beneficio hujus axiomatis quaſdam facere mutationes, factis priùs quibuſdam ſuppoſitionibus. Ut ſi ſit $x^3 = aab$, & ſupponatur $ay = xx$, ſi ſubſtituatur valor quadrati xx in æquatione $x^3 = aab$, habebitur $ayx = aab$, vel, facta diviſione per a, $yx = ab$.

Similiter ſi ſit $xx = ax + bb$, & ſupponatur $ac = bb$, habebitur $xx = ax + ac$, & ſi contra ſupponatur $ac = bb$, habebitur $xx = ax + bb$, id, quod dicitur *quadratum in rectangulum, vel rectangulum in quadratum mutare*. Hujus mutationis frequens ſolet uſus eſſe.

Offendere eſt in plurimis ſapientum Geometrarum operationibus magnum Theorematum numerum, quæ circa habitudines, proportiones, & progreſſiones oſtenduntur, verum methodus deſideratur, qua omnia eodem principio demonſtrentur; quod quidem præ cæteris optandum eſt tam in hac, quàm in reliquis omnibus matheſeos partibus.

Ex iis, quæ ſupra (*num.* 18. 19. 20. 21.) dicta ſunt, inferri poſſet methodus demonſtrandi facillimè omnes proprietates proportionum, & progreſſionum tum arithmeticarum, tum geometricarum, ſed illa nec admodum generalis eſt, nec niſi magnitudinibus proportionalibus congruit. Quare viſum mihi eſt, aliam tenere viam, quæ omnibus in genere conveniat, non ſolum magnitudinibus proportionalibus, ſed etiam omnibus theorematis, quæ ope algebræ demonſtranda proponuntur in omnibus matheſeos partibus, Ecce tibi principium.

PRIN-

PRINCIPIUM.

28 POſtquam quantitates, quæ in quæſtionem ingredi debent, litteris ſunt nominatæ, ſcribatur hypotheſis in æquatione, itemque conſequentia in æquatione, ita deinde diſponatur juxta ea præcedentia axiomata, eorumque corollaria hypotheſis, ut conſequentiæ ſimilis evadat, tumque Theorema oſtenſum erit: pariter, ſi termini æquationis, quæ conſequentiam continet, omnino ſimiles fuerint, ut, facta reductione, reperiatur $o=o$, theorema erit demonſtratum, nam termini alicujus æquationis nunquam omnino ſimiles eſſe poſſent, niſi forent æquales, neque deſtrui, niſi eſſent ſimiles.

PRINCIPII EXPLICATIO.

I THeorema duas continet partes, hypotheſim, & conſequentiam, hypotheſis eſt id, quod ſupponitur, conſequentia autem eſt veritas, quæ demonſtranda proponitur.

II Principium exigit, ut hypotheſis ſemper in æquatione ſcribatur. Sæpe hypotheſis talem continet æquationem, vel ſaltem proportionem hujuſmodi continet, quæ facilè in æquationem mutetur, nam ſi habeatur $a, b :: c, d$, habebitur (*num.* 12) $a-b=c-d$, ſi proportio ſit arithmetica, & $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ſi proportio ſit geometrica; proportio enim nihil aliud eſt, quàm duarum habitudinum æqualitas.

III Si neque æquationem, neque proportionem contineat hypotheſis, quantitates, quas illa continet, ſupponantur æquales aliis litteris ad libitum ſumptis, hoc enim modo provenient æquationes, ut in exemplis videre licebit.

IV. Ex hypotheſi totidem eruantur æquationes, quot poſſunt; id enim non niſi facilem reddere poteſt modum, quo hypotheſis conſequentiæ ſimilis reddatur.

Cùm demonſtrandæ ſint aliquæ proprietates, quæ ad inæquales magnitudines, vel ad inæquales ſpectant habitudines, exprimantur hypotheſis, & conſequentia ope ſignorum $>$, & $<$ hoc modo, $a>$, vel $<b$; $\frac{a}{b}>$, vel $<\frac{c}{d}$, adhibeanturque hæ expreſſiones, quæ *inæqualitates* appellari poterunt, non minùs ac

æqua-

æquationes forent: nam manifeſtum eſt addi, ſubduci, multiplicari, & dividi poſſe duo harum inæqualitatum membra per eandem quantitatem, vel per quantitates æquales; necnon poſſe combinari, uti placuerit, cum æquationibus, elevari ad poteſtatem, radicem extrahi, uno verbo, ad æquationum modum poſſe conſiderari, dummodo non ita ſimul combinentur, ut membrum majus non ſit ſemper majus, adeo ut iidem ſuppetant modi reddendi hypotheſim ſimilem conſequentiæ, vel conſequentiam ſimilem hypotheſi, qui habentur in æquationibus, & per conſequens oſtendendi eadem ratione omnes proprietates habitudinum inæqualium, quæ æqualium habitudinum proprietates demonſtrantur.

V. Sæpe juvat, immo neceſſum eſt, uti facilius æquatio, quæ continet hypotheſim, illi, quæ continet conſequentiam, ſimilis reddatur, nominare magnitudines proportionales eo modo, quo *num.* 19 20 21 22 dictum eſt, & nominare iisdem litteris quantitates inæquales, quæ proportionales non ſunt, diſtinguendo ſingulas aliquo ſigno, vel aliqua littera, quæ illarum indicet inæqualitatem. Ut ſi oſtendenda ſit aliqua proprietas, quæ tribus magnitudinibus differentibus A, B, C, conveniat, nominata A, *a*, loco nominandi B, *b*, & C, *c*, nominari poterit B, ma (*m* ſignificat multiplum, vel ſubmultiplum) vel $a \pm p$; & C, na (*n* ſignificat multiplum, vel ſubmultiplum diverſum ab *m*) aut $a \pm p \pm r$, adhibitis ſignis +, vel —, ſecundum quod quantitates exprimendæ majores, minoreſve ſunt, quàm illa, quæ per primam litteram *a* eſt expreſſa.

Quæ deinceps de habitudinibus, proportionibuſque dicentur, hæc de habitudinibus, proportionibuſque geometricis dicta intelligantur, dummodo id, quod dicitur, etiam ad habitudines, proportioneſque ſpectare arithmeticas, non admoneatur.

THEOREMA I.

29 *Si quatuor magnitudines* a, b, c, d *ſint in proportione geometrica, extremarum productum producto mediarum æquale erit.*

Numerum ſi $a.b :: c.d$ probandum eſt, $ad = bc$.

Ex hypotheſi habetur $a.b :: c.d$. Ergo (*num.* 11.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

atqui

atqui manifestum est, (*axio.* 1. *coroll.* 4.) fractione dempta, haberi $ad = cd$. Ergo $ad = cd$, quod est simile consequentiæ Quod erat ostendendum.

30 Eodem discursu osteodetur, in proportione continua productum extremarum æquari quadrato mediæ: sic, si $a.b::b.c$, proveniet $ac = bb$.

Theorema hoc alium suppeditat modum, quo in decursu utemur, ut in æquationem proportionem mutemus.

COROLLARIA.

I. Colligitur, si tres innotescant alicujus proportionis termini a, b, c, semper reperiri posse quartum, qui supponatur x: nam cùm (*hypoth.*) $a.b::c.x$, habebitur (*num.* 29.) $ax = bc$; & dividendo totam æquationem per a, proveniet $x = \frac{bc}{a}$; ex quo sequitur, valorem bc divisum per a daturum valorem ipsius x.

II. Sequitur etiam, cognitis in proportione continua extremis terminis a, & b, inveniri posse medium, qui vocetur y, nam cùm (*hypoth.*) $a.y::y.b$, erit $yy = ab$, & (*axio.* 2) $y = \pm\sqrt{ab}$, ideoque radix valoris ab erit valor ipsius y. Valores negativi problematibus non satisfaciunt.

THEOREMA II.

31 *Radices productorum, quæ formant quodcunque æquationis membrum, sunt reciprocè proportionales, hoc est, si sumantur radices unius membrorum pro extremis, & radices alterius pro mediis, hæ quatuor radices proportionem formabunt.*

Sit æquatio $abc = dfg$, probandum est, $ab.df::g.c$, vel ut consequentia sit in æquatione $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$; æquatio enim nunquam potest esse vera, quin vera etiam sit proportio.

Si dividatur tota æquatio $abc = dfg$ per cg, habebitur $\frac{abc}{cg} = \frac{dfg}{cg}$: sed $\frac{abc}{cg} = \frac{dfg}{cg} = (art.\ 1.\ num.\ 37.)\ \frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$. Ergo $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$,

quod eſt ſimile conſequentiæ. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIA

I. EX eadem æquatione $abc = dfg$ plures aliæ inferri proportiones, eæque eadem demonſtrari ratione poſſunt, dummodo extremi termini in uno membro, & medii in altero ponantur, ſerveturque lex homogeneorum, ſcilicet quòd termini cujuſvis habitudinis pari dimenſionum numero conſtent. Sic inferri poteſt $a . df :: fg . bc$; & $b . f :: dg . ac$, &c: & licèt deduci etiam poſſet $a . df :: fg . bc$, ad uſum tamen id traduci non debet; ſiquidem quantitates genere differentes ſimul conferrentur, ut linea cum plano, &c

II Patet quoque ad hoc, ut æquatio reduci poſſit ad proportionem, oportere, quodvis membrum eſſe productum duarum quantitatum, quæ per diviſionem ſeparari queant: hinc eſt, quòd ſæpe opus eſt, ut illa de ſuo ſtatu mutetur, quò in proportionem poſſit converti. Sic hæc æquatio $xx = ax + bb$ in ſtatu, in quo eſt, nunquam ad proportionem traduci poterit; cùm ſecundum membrum nulla poſſit quantitate dividi, ſed tranſponendo habebitur $xx - ax = bb$, unde inferri poteſt $x . b :: b . x - a$: & ex hac $xx = aa - bb$ haberi poteſt $x - b . x :: x . a + b$: & ex hac $xx = aa + bb$, vel $xx - aa = aa$ deduci poteſt $x - a . b :: b . x + a$. Verùm ut hæc $xx = aa - bc$ in proportionem mutetur, commutandum eſt bc in quadratum, vel aa in rectangulum, cujus unum latus ſit b, vel c, ſi fiat itaque v. g. $bc = dd$, habebitur $xx = aa - dd$; unde erit $a - d . x :: x . a + d$. Idem de aliis dicendum.

III. Sequitur etiam, aliquam habitudinem, ſeu fractionem, puta $\frac{ab}{c}$ eſſe unum proportionis terminum, treſque alios in ſe continere; nam ſi ponatur hæc $\frac{ab}{c} = x$, & multiplicetur per c, habebitur $ab = cx$. Ergo (*num.* 31.) $c . a :: b . x$, vel $c . a :: b . \frac{ab}{c}$, ſubſtituendo nimirum pro x ejus valorem $\frac{ab}{c}$.

IV Deducitur inſuper ex duobus præcedentibus Theorematis, ſi quatuor magnitudines a, b, c, d fuerint proportionales, hoc eſt, $a . b :: c . d$, proportionales etiam futuras in quatuor ſequentibus variationibus.

2 $a.c::b.d$ quod dicitur *Permutando*.
2 $b.a::d.c$ quod dicitur *Invertendo*.
3 $a+b.b::c+d.d$ quod dicitur *Componendo*.
4 $a-b.b::c-d.d$ quod dicitur *Dividendo*.

Nam ſi æquationes, quæ ex his quatuor analogiis (*num.* 29) deducuntur, ſunt veræ, veræ quoque erunt & ipſæ analogiæ: atqui prima, & ſecunda exhibent $ad=bc$; tertia autem $ad+bd=bc+bd$; quarta verò $ad-bd=bc-bd$, & hypotheſis $a.b::c.d$ dat $ad=bc$, quæ eſt prima æquatio, & quæ per conſequens oſtendit veritatem duarum primarum analogiarum. Ergo &c.

Si verò addatur, vel ſubducatur bd a quovis membro æquationis $ad=bc$ ex hypotheſi deductæ, habebitur $ad+bd=bc+bd$, & $ad-bd=bc-bd$, quæ ſunt æquationes omnino ſimiles duabus ultimis æquationibus ex duabus poſtremis analogiis deductis, quæque conſequenter illarum veritatem demonſtrant. Ergo &c.

Aliæ etiam variationes in proportionibus dantur, quas eadem facilitate oſtendere licebit.

THEOREMA III.

31 *Si duæ magnitudines quæcunque* a, & b *per eandem magnitudinem* c *rationalem, vel irrationalem multiplicentur, producta* ac, & bc *erunt in eadem ratione, quæ eadem quantitates* a, & b.

Scilicet probandum eſt $ac.bc::a.b$, vel, ut (*num.* 29.) conſequentia ſit in æquatione, $abc=abc$.

Quoniam duo hujus æquationis membra ſunt ſimilia, ſequitur (*num.* 29. & 31.), id, quod erat propoſitum, eſſe verum.

COROLLARIA.

1. COlligitur, duci poſſe quatuor terminos alicujus proportionis, vel alterutram duarum habitudinum, quæ illam

lam componunt, vel duos antecedentes, vel duos consequentes harum habitudinum, in quamlibuerit quantitatem, absque eo, quòd hæ habitudines æqualitatem amittant.

II Et quoniam habitudines, seu divisiones indicatæ sunt fractiones, sequitur, multiplicari posse duos terminos fractionis per quamvis quantitatem, absque eo, quòd fractio valorem mutet. Sic $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$; si nimirum duo termini per c multiplicentur.

III Quantitas quævis, quæ fractionaria non sit, si cum unitate conferatur, evadit fractio, id, quod in ea nihil mutat: hinc est, omnem quantitatem, quæ non sit fractionaria, in fractionem posse mutari, cujus denominator sit quantitas, quæ placuerit. Sic a, vel $\frac{a}{1} = \frac{ab}{b}$; si nempe uterque terminus in b ducatur.

IV Deducitur quoque, fractionibus dari posse denominatores similes, cum illos differentes habeant, id, quod dicitur *reducere fractionem ad eandem denominationem*. Ad hoc enim sufficit ducere duos terminos cujusque fractionis in alterius denominatorem, si non nisi duæ sint. Sic ut reducantur ad eandem denominationem $\frac{ab}{c}$, & $\frac{df}{g}$, ducantur duo primæ fractionis termini in g, & duo secundæ in c, & habebuntur $\frac{abg}{cg}$, & $\frac{cdf}{cg}$. Si verò fractiones plures sint, ducantur duo termini cujusque in productum resultans ex aliarum denominatoribus. Sic ut reducantur ad eandem denominationem $\frac{a}{d}$. $\frac{b}{f}$. $\frac{c}{g}$, ducantur duo termini primæ fractionis in fg, duo secundæ in dg, & duo tertiæ in df, & habebuntur $\frac{afg}{dfg}$ $\frac{bdg}{dfg}$. $\frac{cdf}{dfg}$.

Sæpe reperiuntur fractiones, quæ ad eandem possunt reduci denominationem absque eo, quòd omnes expressionem mutent. Sic $\frac{abb}{fg}$, & $\frac{gb}{c}$ ad eandem denominationem erunt reductæ, si duo secundæ fractionis termini multiplicentur per d; nam habebitur $\frac{dgb}{cd}$.

V Infertur etiam, idem esse dividere denominatorem alicujus

ejus fractionis per quamcunque quantitatem, ac multiplicare ejus numeratorem per eandem quantitatem. Sic $\frac{\frac{ab}{c}}{d} = \frac{\frac{abd}{cd}}{d} = \frac{abd}{cd}$.

THEOREMA IV.

33 *Si duæ magnitudines quæcunque* a, & b *per eandem magnitudinem* c *rationalem, vel irrationalem dividantur, quotientes* $\frac{a}{c}$, & $\frac{b}{c}$ *erunt in eadem ratione, qua primæ magnitudines* a, & b.

Nempe probandum est, $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, vel supponendo $\frac{a}{c} = p$, & $\frac{b}{c} = q$; $p . q :: a . b$, seu, ut consequentia sit in æquatione, $bp = aq$.

Ex prima æquatione (*axio.* 2 *coroll.* 4.) habetur $a = cp$, & ex secunda, $b = cq$, unde (*axio.* 1 *coroll.* 1) sequitur $acq = bcp$, vel dividendo per c, $aq = bp$. Quare (*theor.* 2.) $p . q :: a . b$, seu $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, substitutis numerum pro p, & q, eorum valoribus $\frac{a}{c}$, & $\frac{b}{c}$ QEO.

COROLLARIA.

I. HOc Theorema hâc etiam ratione posset ostendi: Hypothesis ipsa $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$ exhibet (*theor.* 1.) $\frac{ab}{c} = \frac{ab}{c}$, quæ æquatio per se ipsa manifesta est.

II. Hujus beneficio theorematis habetur modus reducendi habitudines, seu fractiones ad suas simpliciores expressiones. Hoc fit dividendo tam terminum antecedentem, quàm consequentem cujusque habitudinis per eandem quantitatem, quæ vocatur *communis divisor*, quotientes enim inde resultantes aliam constituunt habitudinem, seu fractionem, propositæ quidem æqualem, sed tamen simpliciorem.

Porro hujusmodi communem cognoscere divisorem sæpe facile est, præcipue cùm duo termini habitudinis dividendæ sunt

incomplexi. Verùm si ex sola terminorum inspectione ille non innotescat, inveniantur (*art. 1. num. 56. & 57.*) omnes divisores tam antecedentis, quàm consequentis; illi verò divisores antecedentis, qui erunt iidem cum divisoribus consequentis, omnes erunt communes divisores, verùm non nisi maximus erit adhibendus. Quòd si inter antecedentis divisores nullus, qui cum divisoribus consequentis coveniat, reperiatur, fractio ad simpliciores terminos reduci non poterit.

EXEMPLA.

I Exempl. Fractio $\frac{aab}{ac}$ reducitur, sive æquatur ipsi $\frac{ab}{c}$, diviso nempe utroque termino per communem divisorem a.

II Exempl. $\frac{abc\sqrt{abd}}{cc\sqrt{aa}} = \frac{ab\sqrt{bd}}{a\sqrt{c}}$; divisis scilicet partibus rationalibus per c, & irrationalibus partibus per $\sqrt{a}$.

III Exempl. $\frac{abc\sqrt{abc}}{cd\sqrt{b}} = \frac{ab\sqrt{ac}}{d}$; divisis nimirum partibus rationalibus quidem per c, irrationalibus verò per $\sqrt{b}$.

IV. Exempl. $\frac{a^1}{a^1} = \frac{1}{1} = 1$, diviso videlicet utroque termino per a^1: sed (*art. 1. num. 22.*) $\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$. Ergo $a^0 = 1$; quod a nobis loco citato suppositum fuerat.

V. Exempl. $\frac{a^1}{a^3} = \frac{1}{a^2}$, diviso nempe utroque termino per a^3: sed (*art. 1. num. 22.*) $\frac{a^1}{a^3} = a^{1-3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; quod pariter a nobis ibidem fuerat suppositum.

VI Exempl $\frac{25ab}{15bc} = \frac{5a}{3c}$; diviso scilicet utroque termino per communem divisorem $5b$.

VII Exempl $\frac{aac+abc}{aa-bb} = \frac{ac}{a-b}$, diviso nimirum utroque termino per communem divisorem $a+b$.

VIII. Exempl. $\frac{a^3-b^3}{aa-bb} = \frac{aa+ab+bb}{a+b}$, diviso videlicet utroque termino per communem divisorem $a-b$.

THEO.

THEOREMA V.

34 *SI eadem quantitas* a *per duas differentes quantitates* b, & c *dividatur, quotientes ſuis diviſoribus reciprocè proportionales erunt.*

Videlicet probandum eſt, $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$, vel ſuppoſitis $\frac{a}{b} = p$, & $\frac{a}{c} = q$, $p . q :: c . b$, ſive, ut conſequentia ſit in æquatione, $bp = cq$.

Prima ſuppoſitio dat $a = bp$, ſecunda verò $a = cq$. Ergo (*axio.* 3.) $bp = cq$. Quare (*theor.* 2.) $p . q :: c . b$, vel $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$, ſubſtituendo nimirum loco p, & q eorum valores $\frac{a}{b}$, & $\frac{a}{c}$. Q. E. D.

Hoc idem Theorema ſimpliciùs oſtendi poſſet; nam conſequentia $\frac{a}{b} . \frac{a}{c} :: c . b$ exhibet (*theor.* 1.) $\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$, hoc eſt (*art.* 1. *num.* 37.) $a = a$, vel $a - a = 0$, ſeu $0 = 0$.

THEOREMA VI.

35 *SI tres magnitudines* a, b, c *ſint in proportione continua, prima* a *erit ad tertiam* c, *ut prima quadratum* aa *eſt ad ſecundæ quadratum* bb.

Nimirum probandum eſt $a . c :: aa . bb$; vel, ut conſequentia ſit in æquatione, $aac = abb$.

Ex ipſa hypotheſi habetur $a . b :: b . c$. Ergo $ac = bb$, & multiplicando utrumque membrum per a, habetur $aac = abb$. Q. E. D.

THEOREMA VII.

36 *QUotieſcunque plures habitudines fuerint æquales, ut* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, *&c. ſumma terminorum antecedentium* a + c + e *erit ad ſummam conſequentium* b + d + f, *ut quivis antecedens eſt ad ſuum conſequentem.*

Nem-

Nempe probandum est, $a+c+d, b+d+e :: a.b$; vel, ut consequentia sit in æquatione, $ab+be+bd=ab+ad+ae$, vel dempto hinc, & illinc termino ab, qui per reductionem destruitur, $be+bd=ad+ae$.

Duæ primæ habitudines æquales (*hypoth.*) dant $ad=be$, prima verò, & tertia pariter æquales dant $ae=bd$. Ergo (*axio. 1. coroll. 1.*) $be+bd=ad+ae$. Q.E.D.

COROLLARIUM.

37 Sequitur ex hoc Theoremate, si cognoscantur duo primi termini, ut a, & b, & ultimus c alicujus progressionis geometricæ, facilè haberi posse summam omnium terminorum, qui illam componunt: nam si summa antecedentium nominetur x, summa consequentium erit $x-a+c$: atqui ex hoc theoremate $x.x-a+c :: a.b$. Ergo (*theor. 1.*) $bx=ax-ac+ac$, vel, transponendo, & supponendo, $a>b$, $ax-bx=ac-ac$; unde deducitur (*axio 1 coroll 5.*) $x=\frac{ac-ac}{a-b}$. Quod erat invenendum.

Si $a>b$, seu, quod idem est, si progressio decrescat, supponaturque infinita, supposito ultimo termino $c=0$, habebitur $x=\frac{ac}{a-b}$ pro valore omnium progressionis terminorum, nam terminus ac destruitur propter $c=0$

THEOREMA VIII.

38 *EX duabus quantitatibus* a, & b *inæqualibus, major* a *ad tertiam magnitudinem* c *habet majorem rationem, quàm minor* b; *& eadem magnitudo* c *majorem habet rationem ad minorem* b, *quàm ad majorem* a.

Scilicet probandum est. 1. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ & 2. $\frac{c}{b}>\frac{c}{a}$.

Jam (*hypoth.*) habetur $a>b$. Ergo (*prim. præced. ejusque explicat.*) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$; diviso nempe utroque hujus inæqualitatis membro per c. Id, quod primo loco ostendendum erat.

Iterum (*hypoth.*) habetur $a>b$. Ergo multiplicando utrumque

que, hujus inæqualitatis membrum per c, & dividendo per ab, habebitur $\frac{ac}{ab} > \frac{bc}{ab}$, seu (*ex. 1 num. 37*) $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$. Id, quod demonstrandum secundo loco erat propositum.

CUm supra de multiplicatione, & divisione ageremus, supposuimus a nobis fuit, $+ \times +$, & $- \times -$ producere $+$; & $+ \times -$, vel $- \times +$ producere $-$; hujus suppositionis, ut vera ostendatur, hic a nobis ratio est reddenda, uno tantùm posito principio, hoc est $+ \times +$ producere $+$, de quo nemo, opinor, invenirí poterit, qui ambigat.

39 Ducendum sit $a - b$ in $+c$; ato, productum futurum $ac - bc$: nam si supponatur $a - b = p$, habebitur transpoendo $a = p + c$, & si hæc æquatio ducatur in $+c$, proveniet $ac = pc + bc$. Ergo transpónendo $ac - bc = pc$. Quare $a - b \times + c = ac - bc$.

40 Sit deinde multiplicandum $a - b$ per $-c$, contendo, futurum productum $-ac + bc$: posito namque $a - b = p$, si transponatur, erit $a = p + b$. Ergo si hæc æquatio multiplicetur per $-c$, proveniet (*num.* 39.) $-ac = -pc - bc$, vel $-ac + bc = -pc$. Igitur $a - b \times -c = -ac + bc$.

41 Similiter assero, $\frac{ab}{-a} = -b$. nam productum divisoris per quotientem producere debet dividendum, quod quidem nunquam fieret, si quotiens esset $+b$. nam $-a \times +b = -ab$, quod non est dividendum propositum. Contra verò $-a \times -b = +ab$, quod est quantitas dividenda proposita.

42 Hinc clarè sequitur, $\frac{ab}{-a} = \frac{-ab}{a}$. nam in utroque casu quotiens debet esse negativus, quod a nobis alibi suppositum est.

ADNOTATIO.

I. OMnis calculus Algebricus inhitit tribus præcedentibus Axiomatis, & quatuor prioribus Theorematis nuper demonstratis, Reliqua quatuor ultima ea tantum de causa a nobis demonstrata sunt, ut innotescerent usus nostri principii, & ut ejus ope manifestaretur, ostendi posse tali methodo; quæ eadem semper sit, omnes proprietates habitudinum æqualium, & inæqualium, proportionum, & progressionum geometricarum.

II. Eidem inhærendo principio demonstrari possunt facilitate ea-

dem

dem omnes proprietates habitudinum, proportionum, & progressionum arithmeticarum.

III Æquatio, quæ consequentiam, vel veritatem demonstrandam exprimit, liberari semper potest a fractionibus, signisque radicalibus, reducique ad suos simpliciores terminos, antequam ea æquatio, quæ hypothesim continet, illi similis reddatur: nam cùm æquatio vera est in aliquo casu, etiam in omnibus aliis, quos admittere potest, erit semper vera.

Supereſt nunc agendum de additione, subductione, multiplicatione, divisione, & radicum extractione habitudinum, sive fractionum.

ADDITIO, & SUBDUCTIO.

43 UT habitudines, sive fractiones addantur, scribendæ sunt una post aliam, nullis mutatis signis; ut verò subducantur, scribendæ sunt una post aliam, iis tantùm signis mutatis, quæ ad subtrahendas attinent, sive denominatorem habeant communem, sive non. Revocandæ deinde sunt ad eundem denominatorem, & postquam reducti fuerint (*art.* 1 *num.* 11.) in utroque casu numeratores similes, sumenda est pro summa, vel differentia, illa, quæ in duabus expressionibus erit simplicissima.

EXEMPLA.

UT addatur $\frac{ab}{c}$ ipsi $\frac{ad}{c}$, scribatur $\frac{ab+ad}{c}$: ut addatur $\frac{aabb}{a^4-2aabb+b^4}$ ipsi $\frac{aabb}{aa-bb}$, scribatur $\frac{aabb}{a^4-2aabb+b^4}+\frac{aabb}{aa-bb}$, vel postquam reductæ sunt ad eandem denominationem $\frac{aab^4+a^4bb-aab^4}{a^4-2aabb+b^4}$ = (*art.* 1 *num.* 11.) $\frac{a^4bb}{a^4-2aabb+b^4}$, quæ expressio simplicior est, quàm prima.

Ut subducatur $\frac{ab}{c-d}$ ex $\frac{aa-bb}{c}$, scribatur $\frac{aa-bb}{c}-\frac{ab}{c-d}$, vel, postquam reductæ sunt ad eundem denominatorem, $\frac{aac-bbc-acd+bbd-abc}{cc-cd}$. Prima expressio simplicior est.

MUL-

MULTIPLICATIO.

44 UT habitudines, ſeu fractiones multiplicentur, ducendi ſunt primo inter ſe numeratores, deinde verò denominatores; duo producta inde reſultantia novam conſtituent fractionem, quæ ad ſuam ſimpliciorem expreſſionem reducenda erit.

EXEMPLA.

SIt $\frac{ac}{b}$ ducenda in $\frac{be}{d}$. Supponantur $\frac{ac}{b} = p$, & $\frac{be}{d} = q$, probandum eſt, $\frac{abce}{bd} = pq = \frac{ace}{d}$.

Prima ſuppoſitio dat $ac = bp$, & ſecunda $be = dq$. Ergo (*axio. 1. coroll. 1.*) $abce = bdpq$. Quare (*axio. 1. coroll. 5.*) $\frac{abce}{bd} = pq = \frac{ace}{d}$. Q.E.D.

Similiter $\frac{ab}{c} \times b + \frac{cd}{b}$, vel (*theor 3. coroll. 3.*) $\frac{ab}{c} \times \frac{bb+cd}{b} = \frac{abb+abcd}{bc} = \frac{abb+acd}{c}$; diviſis nimirum duobus terminis per b. Ob eandem rationem $\frac{ab}{c} \times d$, vel $\frac{d}{c} = \frac{abd}{c}$, &c.

DEFINITIO.

45 PRoductum $\frac{ac}{bd}$ duarum habitudinum differentium $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$ appellatur *habitudo compoſita*, ſeu *ratio compoſita*: & productum $\frac{aa}{bb}$ alicujus habitudinis $\frac{a}{b}$ in ſeipſam ductæ dicitur *habitudo duplicata*, ſeu *ratio duplicata*.

DIVISIO.

46 PRoductum numeratoris habitudinis, ſeu fractionis dividendæ in denominatorem diviſoris erit numerator quotientis; productum verò denominatoris ejuſdem habitudinis,

nis, seu fractionis dividendæ in numeratorem divisoris, erit denominator quotientis: qui quotiens deinde ad suam simpliciorem expressionem est reducendus.

EXEMPLA.

PRoposita sit fractio $\frac{ab}{c}$ dividenda per $\frac{ac}{b}$; supponantur $\frac{ab}{c} = p$, & $\frac{ac}{b} = q$, probandumest, $\frac{abb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$.

Prima suppositio dat $ab = cp$, secunda autem $ac = bq$. Ergo (*axio. 1. coroll. 2.*) $\frac{ab}{ac} = \frac{cp}{bq}$, vel, ducto quolibet membro in b, & diviso per c, $\frac{abb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$. Q. E. O.

Eadem ratione fractio $\frac{ac}{b}$ divisa per d, seu per $\frac{d}{1}$, exhibet $\frac{ac}{bd}$, &c.

EXTRACTIO

Radicum Quantitatum fractionariarum.

47 MAnifestè sequitur ex regulis multiplicationis fractionum, ut extrahantur earum radices, sat esse extrahere radicem tam numeratoris, quàm denominatoris, hæ duæ radices novam constituunt fractionem, quæ erit radix fractionis propositæ. Sic $\sqrt{\frac{8abc}{4bcc}} = \frac{2b\sqrt{2ac}}{2c\sqrt{b}} = \frac{b\sqrt{2ac}}{c\sqrt{b}}$, &c.

Eædem operationes locum habent etiam in fractionibus irrationalibus, neque enim ad hoc, quod attinet, quicquam habent peculiare.

FINIS.

DEFINITIONES, & POSTULATA.

SCientiæ Mathematicæ objectum eſt Quantitas in genere, Extenſio, Numerus, & Motus.

Geometria conſiderat extenſionem in particulari.

Extenſio tres habet dimenſiones, Longitudinem, Latitudinem, & Profunditatem.

Longitudo ſi abſque Latitudine, & Profunditate conſideretur, Linea appellatur.

Longitudo, & Latitudo ſi ſimul conſiderentur independenter a profunditate, vocantur Superficies.

Longitudo, Latitudo, & Profunditas ſimul conſideratæ appellantur Corpus, ſeu Solidum.

Linea triplex eſt, Recta ſcilicet, Curva, & Mixta.

Linea recta eſt breviſſima omnium menſura inter duo puncta, ut linea A B (*Tab 1 fig 1*)

Punctum eſt extremum Lineæ, conſideraturque ut non habens longitudinem, neque latitudinem, neque profunditatem. Et latitudinem quidem nullam habere poteſt, quia nec ipſa linea ullam prorſus habet; neque etiam ullam longitudinem, quoniam ipſum evaderet linea, nec eſſet ſolummodo ejus extremum.

Poſitio Lineæ Rectæ non dependet niſi ex duobus datis punctis. Suppoſito enim unum verſus alterum fluere, deſcribet lineam rectam, quæ in infinitum continuari poteſt, ſi punctum illud ſemper fluat directè, hoc eſt abſque flexione, ſive receſſu a puncto, ad quod primùm moveri cepit. Hinc quicunque habet duo puncta lineæ rectæ, totam omnino habet lineam.

Linea Recta dicitur perpendicularis reſpectu alterius lineæ rectæ, quando duo ex punctis primæ lineæ directè inſiſtunt eidem puncto illius lineæ, cujus ea dicitur perpendicularis. Ut linea A B (*fig 2*) dicitur perpendicularis lineæ C B D, quoniam duo ex ejus punctis, ut A, E directè inſiſtunt puncto B. Ita ut punctum A directè fluens verſus E, lineamque A E deſcribens incurrat in punctum B, ſi directè moveri pergat, atque adeo tota linea A E B eam habebit poſitionem reſpectu lineæ C B D, ut omnia puncta primæ lineæ directè puncto B inſiſtant, quod duabus lineis commune eſt, ac per conſequens

linea A E B non magis ad unam, quam ad alteram inclinabit partem reſpectu lineæ C B D. Certum igitur eſt, id tunc evenire, cùm duo puncta, ut A, E directè inſiſtunt communi puncto B: quia hæc duo puncta lineæ poſitionem determinant. Contra verò linea B F obliqua dicitur reſpectu lineæ C B D, quoniam magis ad unam partem, quam ad alteram inclinat.

Linea Curva ea eſt, quæ a recta deflectit, quæque inter duo data puncta breviſſima menſura non eſt, ut I K L, (*fig.* 3.) quæ declinat a linea recta I L.

Linea Mixta ea dicitur, quæ partim recta, partimque curva eſt.

Duæ lineæ rectæ ſe interſecare nequeunt niſi in unico puncto, quod Interſectionis punctum vocatur.

Superficies quoque triplex eſt, Plana ſcilicet, Curva, & Mixta.

Superficies plana, quæ & Planum dicitur, ea eſt, quæ ita ex æquo inter ſua extrema jacet, ut nullum punctum univerſæ ejus extenſionis altero ſit aut altius, aut inferius: qualis ferme eſt ſuperficies ſpeculorum, quibus vulgò uti ſolemus.

Superficies curva eſt, cujus omnia puncta inæqualiter jacent inter extrema, quæ eam terminant: qualis globi, aut ovi ſuperficies eſt.

Superficies mixta eſt, quæ partim plana eſt, & partim curva.

Circuli circumferentia eſt linea curva, cujus omnia puncta æquè diſtant ab uno, eodemque puncto, quod Centrum appellatur. Talis eſt curva L B E G I H F C D, cujus centrum eſt A. (*fig.* 4.)

Linea recta, quæ tranſiens per centrum A, ex utraque parte ad circumferentiam terminatur, ut linea B A C, appellatur Diameter.

Omnis linea recta a centro ducta, & ad circumferentiam terminata, dicitur radius, ut lineæ A D, A C, A B.

Omnis linea recta, quæ per centrum non tranſit, & ex utraque parte terminatur ad circumferentiam, vocatur chorda; ut linea E F, ſeu G H.

Ea circumferentiæ portio, quam chorda determinat, appellatur Arcus. Sic portio E I F eſt arcus chordæ E F, & portio G I H eſt arcus chordæ G H.

Uſu jam receptum eſt, ut Geometræ dividant circumferentiam in 360 partes æquales, quæ gradus vocantur. Gradus quilibet dividitur in 60 partes æquales, quæ Minuta dicuntur. Quodlibet

Minu-

Minutum in 60 ſecunda, &c. Ita tamen, ut Gradus nomine non abſoluta magnitudo intelligenda ſit, ſed 360ma pars cujuſcunque circumferentiæ, ſive magna illa fuerit, ſive parva. Sic minima circumferentia tot habet gradus, quot maxima, ſed illa proportione minores habet.

Superficies plana per circumferentiam terminata Circulus dicitur.

Omnes ejuſdem Circuli radii ſunt æquales.

Circuli æquales radios æquales habent.

In eodem circulo, ſive in circulis æqualibus, chordæ æquales arcus æquales ſubtendunt; & æquales arcus æqualibus chordis ſubtenduntur.

Chordæ æquales in eodem circulo æqualiter diſſant a centro.

AXIOMATA, *ſeu* VERITATES *per ſe notæ*.

TOtum eſt majus ſua parte.

Continens majus eſt contento.

Totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

Duo uni eidem æqualia, inter ſe quoque ſunt æqualia.

Si æqualibus æqualia addantur, ſummæ erunt æquales.

Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent erunt æqualia.

Idem eſt 12 in 8 ducere, ac 8 in 12.

Idem eſt ducere 12 in 8, ac ducere 12 in partes plures, quæ ſimul ſumptæ æquentur 8. Ut 2, 4, 1, 1 æquivalent 8. Si ducatur numerus 12 in 2; 12 in 4, 12 in 1, 12 in 1, provenient 24, 48, 12, 12: hæc quatuor producta ſimul ſumpta conficiunt 96: ſed jam idem omnino numerus 96 productus fuiſſet, ſi unica multiplicatione 12 in 8 ductus fuiſſet. Uno verbo idem eſt, aliquam magnitudinem per aliquod totum multiplicare, ac per omnes partes ejuſdem totius.

Duæ magnitudines, quæ ejuſdem magnitudinis eædem partes ſint, ſunt æquales.

Si duæ magnitudines æquales in eandem ducantur magnitudinem, producta erunt æqualia.

Si duæ magnitudines æquales per eandem magnitudinem dividantur, quotientes, hoc eſt magnitudines, quæ ex diviſione reſultant, erunt æquales.

Arithmeticæ cognita hoc loco supponuntur, sicuti & extractionis radicis quadratæ.

Peropandum esset, Tyronem hanc sibi operam sumere, ut attentè legeret brevem hunc, qui sequitur, tractatum de Arithmetica per litteras. Res fortè difficilior videbitur, quam sit. Utcunque erit, ubertem laborum suorum fructum reperisse se agnoscent ex voluptate, quam ulterius progressi percipient ex utilitate, & secunditate hujus compendii. Quod si Tyronis captum excedere videatur, praetermittere poterit, dummodo ad illud regrediatur, postquam primis elementorum libris ita se mens exercuerit, ut altiùs, & attentiùs meditari possit.

COMPENDIUM ARITHMETICES PER LITTERAS,

Quæ vulgò Speciosa *dicitur.*

HÆc Arithmeticæ species cuilibet magnitudini congruit, sive numerus sit, sive linea, sive motus.

Sic A, & B significant aliquando duos numeros, ut 3, 10: aliquando duas lineas — —— ita ut A plus B aliquando idem significet ac 3 plus 10, & aliquando unam lineam alteri additam juxta operantis intentionem.

Ut operationes breves evadant, quædam inventa sunt signa. + significat *plus* — *minus* = *æquale*. Sic A + B significat magnitudinem A unitam esse magnitudini B; B — A significat magnitudinem B minus magnitudine A; B — A = C + D significat, magnitudinem B minus magnitudine A æqualem esse magnitudini C plus magnitudine D.

Duæ literæ, ut A D simul positæ, nullo intercedente signo, significant, magnitudinem A ductam esse in magnitudinem D, vel productum unius per aliam.

Ob eandem rationem A D C significat productum A in D multiplicatum per magnitudinem C. Si ergo A significet 3, & D 4, & C 5, A D significabit 12, quod est productum 3 per 4, & A D C significabit 12 multiplicatum per 5, nempe 60.

Consequenter A A, vel B B significat quadratum magnitudinis A, vel quadratum magnitudinis B, siquidem quadratum nihil aliud est, quam una magnitudo in seipsam ducta. Si igitur A significat 6, A A erit 36. Eadem de causa A A A significabit cubum magnitudinis A.

Sequitur etiam nihil differentiæ esse inter A B C, A C B, C A B; nam si A significet 2, B 3, & C 4, nullum est discrimen inter bis 3 multiplicatum per 4, & bis 4 multiplicatum per 3, seu ter 4 multiplicatum per 2.

Hinc sine demonstratione deducitur, si unum productum constet numero literarum partier pari, hoc est numero pari per numerum parem divisibili, ut A B B A, ubi toties reperitur A, quoties B, productum hoc esse necessariò quadratum, hoc est A B multiplicatum per A B. Ex quo etiam apparet, productum unius quadrati per aliud semper esse quadratum. Ut A A B B est productum magnitudinis A B per seipsam, ac proinde quadratum.

$\frac{A B}{C}$ significat, productum magnitudinis A per magnitudinem B esse divisum per magnitudinem C; ita ut si A est 2, B 6, & C 3, $\frac{A B}{C}$ significet productum 2 per 6, hoc est 12 divisum esse per 3. Porro numerus 12 divisus per 3 dat 4.

Additio.

UT plures simul addantur magnitudines, satis est illas connectere signo +. Observandum tamen, signum + semper subintelligi, ubi nullum aliud adsit signum. Sic B idem est ac + B. Itaque ut addantur in unum magnitudines, quæ appellentur A, B, C, D, scribatur A + B + C + D.

Si eadem quantitas pluries reperitur in additione, toties simul ponatur. Addendæ sint magnitudines A, B, A, A, D loco A + B + A + A + D, scribatur brevitatis ergo 3 A + B + D.

Quòd si magnitudo A + B addenda sit magnitudini C + D − E scribatur simpliciter A + B + C + D − E, signis +, & − nullo modo mutatis.

Similiter ut productum A B producto C D addatur, scribendum est A B + C D.

Subductio.

SI subducenda sit magnitudo 2 A ex magnitudine 4 A, facilè innotescit, residuum esse 2 A.

Ut subtrahatur magnitudo B ex magnitudine A, scribendum est A − B.

Ve-

Verùm ſi ex magnitudine A auferenda ſit magnitudo B — C, oportet invertere ſigna magnitudinis B — C ; adeoque ſcribere A — B + C : nam cùm ex magnitudine A ſubducitur B — C, ſubducitur magnitudo minor, quam B. Si ergo ſcribatur ſimpliciter A — B, ſubducitur plus, quam opus ſit, nimirum quantitas C. Oportet ergo magnitudini A — B addere C, ut ſubductio proba ſit, ſcilicet oportet ſcribere A — B + C. Quod in numeris clariùs innoteſcit.

Ex numero 15 ſubtrahendus eſto 7 — 3, hoc eſt 4 ; ſi ſcribatur 15 — 7 nimis ſubducitur . Quò igitur rectè ſubducatur, ſcribendum eſt 15 — 7 + 3, hoc eſt 11

Uno verbo, ut una, vel plures magnitudines ex una, vel pluribus magnitudinibus auferantur, oportet invertere ſigna magnitudinis ſubducendæ ; ſicque illas connectere magnitudini, a qua fit ſubductio

Ex magnitudine A ſubducenda eſto B — C + D — E; ſcribatur A — B + C — D + E, rectèque ſubductum erit.

Multiplicatio.

OPeratio hæc aliquantò difficilior eſt ; comprehendetur tamen, ſi major attentio adhibebitur.

Si magnitudo A ducenda ſit in magnitudinem B ; jam dictum eſt, ſcribendum eſſe abſolutè A B Similiter ſi multiplicandum ſit 3 A per 4 B, ob eandem rationem ſcribendum erit 12 A B.

Sed ut, quæ ſequuntur, operationes intelligantur, memoriæ recolenda ſunt axiomata, quæ ſuperius dicta ſunt : Totum æquari omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis Idem eſſe multiplicare totum per ſeipſum, ac multiplicare per ſingulas ſuas partes, & omnium productorum ſummam in unum addere. quibus poſitis

Multiplicanda ſit magnitudo A + B per magnitudinem C. Magnitudo A + B intelligitur duabus conſtare partibus, ſcilicet A, & B: multiplicanda igitur eſt A per C, & B per C, ut habeatur productum magnitudinis A + B per C, ſcilicet ſcribendum eſt A C + B C.

Eadem ratione multiplicanda ſit magnitudo A + B per magnitudinem C + D, primò quidem multiplicanda eſt A + B per C, hoc eſt ſcribendum A C + B C, deinde verò multiplicanda

etiam,

etiam eſt A + B per D, hoc eſt ſcribendum A D + B D. Tota ergo multiplicatio eſt A C + B C + A D + B D.

In numeris, multiplicandus ſit 2 + 3 per 4 + 5; ſcilicet 5 per 9. Productum erit 45. Multiplicetur 2 per 4, 2 per 5, 3 per 4, 3 per 5; producta ſunt 8, 10, 12, 15, quorum ſumma eſt 45.

Uno verbo tot multiplicationes partiales peragendæ ſunt, quot characteres differentes habentur tam in magnitudine multiplicanda, quàm in multiplicante.

Quòd ſi multiplicandum ſit A + B per C − D, ſcribendum productum ita erit A C + B C − A D − B D, ſiquidem ſemper obſervandum eſt, ſi ſignum + ducatur in ſignum −, productum eſſe *minus*: & hoc ob eandem rationem, quæ ſupra in ſubductione. Quod clarius in numeris apparet. Nam ſi A ſit 6, B 5, C 4, & D 3, oporteat autem ducere 6 + 5 in 4 − 3. Ducto + 6 in + 4, productum eſt + 24; ducto + 5 in + 4, productum eſt + 20; ducto + 6 in − 3; productum eſt − 18; tandem ducto + 5 in − 3; productum eſt − 15. Quæ quatuor producta ſimul addita efficiunt + 24 + 20 − 18 − 15, hoc eſt 11, quod revera debet eſſe productum, nam ducere 6 + 5 in 4 − 3, idem eſt, ac ducere 11 in 1.

Verum diligenter obſervandum eſt, cùm ducitur ſignum − in ſignum −, productum affici debere ſigno +. Multiplicandum ſit A − B per C − D, in producto ſcribendum eſt + A C − B C − A D + B D.

Scribendum eſt + A C, quia + A multiplicatum eſt per + C.
Scribendum eſt − B C, quia − B multiplicatum eſt per + C.
Scribendum eſt − A D, quia + A multiplicatum eſt per − D.
Scribendum eſt + B D, quia − B multiplicatum eſt per − D.

Cujus rei ratio ut clarius intelligatur, ſit A 8, B 2, C 6, D 1; multiplicandum autem ſit A − B per C − D, hoc eſt + 8 − 2 per + 6 − 1, ſeu 6 per 5; productum neceſſariò erit 30; ſiquidem ducto + 8 in + 6, provenit + 48, ducto − 2 in + 6, reſultat − 12; ducto + 8 in − 1, habetur − 8, & ducto − 2 in − 1, producitur + 2, quæ producta in unum collecta dant + 48 − 12 − 8 + 2, ſcilicet 30, ſicuti neceſſariò erat futurum.

Nam ſi fiat multiplicatio partialis 8 per 6, hæc major erit, quàm ſit opus, octo unitatibus, cùm revera 8 non debeat duci, niſi in 6 − 1, hoc eſt 5; oportebit ergo demere ſemel 8, adeoque in multiplicatione totali ſcribere − 8. Similiter ducto − 2 in + 6 productum − 12 eſt majus vero, cùm − 2 non

ſit

ſit ducendus niſi in + 6 — 1, hoc eſt 5, proindeque productum futurum non eſt, niſi — 10 Cùm ergo dempeus ſit 2 pluſquam ſit opus, reponendus ille eſt in additione multiplicationum partialium, quod fit, dum ſcribitur + 2 pro producto — 1 per — 2. diſcurſus clarus eſt, attentionem tantum exigit

Diviſio.

OPeratio perbrevis eſt: ſegreganda tantùm eſt magnitudo dividenda a magnitudine dividente, interpoſita lineola, ita ut magnitudo, quæ dividitur, ſuperior, quæ verò dividit, inferior ſit. Sic ut dividatur A per B, ſcribendum eſt $\frac{A}{B}$, ut B C per X, $\frac{BC}{X}$, ut BCD per G, $\frac{BCD}{G}$.

Tantùm obſervandum eſt, ſi inſit eadem, vel eædem litteræ tam ſupra, quam infra lineam, utrinque illas eſſe delendas. Expreſſio enim eadem eſt, ſed ſimplicior. Ut ſi ſit $\frac{ABCD}{ABX}$, ſcribatur ſimpliciter $\frac{CD}{X}$.

Cujus ratio eſt, quia ut multiplicetur magnitudo $\frac{CD}{X}$ per A B, ſcribendum eſt $\frac{CDAB}{X}$, & ut dividatur productum hoc per AB, ſcribendum eſt A B infra hoc modo $\frac{CDAB}{XAB}$. Jam multiplicare aliquam magnitudinem per aliam magnitudinem, & dividere productum per eandem magnitudinem, non eſt magnitudinem mutare: ut ducto 5 in 4, provenit 20; diviſo 20 per 4, provenit primus numerus 5.

Si habeatur $\frac{12ABC}{4AC}$ idem ent, ac ſimpliciter 3 B. nam diviſis numeratore, ac denominatore per 4, proveniet $\frac{3ABC}{AC}$, hoc eſt 3 B, ſiquidem 3 B ductum in A C, deinde diviſum per A C ſemper eſt 3 B.

Quæ dicta ſunt, jam ſatis eſſe poſſunt ad ſternendam viam ad Demonſtrationes utiliores.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

LIBER PRIMUS.

De Perpendicularibus, & Obliquis.

PROPOSITIO I.

EX dato puncto, ut A, perpendicularem ducere supra datam lineam, ut BC. (fig. 5.)

EX puncto A, tanquam centro, describatur circulus quicunque secans datam lineam in duobus punctis D, E. Ex duobus punctis D, E, tanquam centris, describantur duo alii circuli inter se æquales, ita tamen, ut eorum radius vel major, vel minor sit radio primi circuli, & ipsi se intersecent in uno puncto, ut F. Per punctum datum A, & punctum intersectionis F ducta linea recta AFG erit perpendicularis datæ lineæ BC.

Nam ex constructione duæ lineæ AD, AE sunt æquales; sunt enim radii ejusdem circuli: similiter æquales sunt duæ lineæ FD, FE, cùm sint radii duorum circulorum æqualium. Habentur igitur duo puncta A, & F, quæ æquè distant a duobus punctis D, & E. Ergo singula lineæ AFG puncta æqualiter distant a duobus punctis D, & E: siquidem duo puncta positionem lineæ determinant. Quare hæc linea AFG in neutram inclinat partem, quod est esse perpendicularem.

PROPOSITIO II.

EX *dato puncto, ut A, in data linea BAC perpendicularem excitare.* (fig. 6.)

Accipiantur duo puncta, ut B, C æquè distantia a puncto A. Ex punctis B, C ut centris describantur duo circuli æquales, qui se intersecent in aliquo puncto, ut D, per quod, & per punctum datum A ducatur linea AD: hæc erit perpendicularis.

Ex constructione enim punctum A æqualiter distat a punctis B, C, sed etiam punctum D, punctum intersectionis duorum circulorum, est æquè distans ab iisdem punctis B, C, cùm ex hypothesi lineæ BD, CD sint radii duorum circulorum æqualium. Habentur igitur duo puncta A, & D, singula æqualiter distantia a punctis B, C. Ergo ex definit. linea AD est perpendicularis.

PROPOSITIO III.

DAtam *lineam, ut AB, in duas æquales partes secare.* (fig. 7.)

Duobus punctis A, B, extremitatibus datæ lineæ tanquam centris sumptis describantur duo æquales circuli, qui se in duobus punctis, ut C, D intersecent. Per duo intersectionis puncta ducta sit linea CD: hæc secabit datam lineam bifariam in puncto E.

Cum enim duo circuli sint æquales, quatuor lineæ CA, CB, DA, DB, quæ illorum sunt radii, debent esse æquales, & consequenter puncta C, D æquè distare debent a punctis A, & B. Igitur quodlibet aliud punctum lineæ CD debet esse æqualiter distans a punctis A, B. Ipsum ergo punctum E æquè distat a punctis A, B extremitatibus lineæ, ideoque illam dividit in duas æquales partes.

Ita sibi quisque infigat animo, ut nihil magis, tres hasce propositiones præcipuè innixi notioni lineæ rectæ, cujus positio omnino determinatur a duobus punctis.

PRO-

PROPOSITIO IV.

EX dato puncto, ut A, extra lineam, ut BC, unica tantùm perpendicularis cadere potest supra datam lineam: & hæc perpendicularis est brevissima omnium aliarum linearum, quæ ab eodem puncto A ductæ terminentur a data linea BC. (fig. 8.)

Perpendicularis sit AD, & a puncto A ducta sit ad aliquod datæ lineæ punctum, ut E, linea AE; sola linea AD poterit esse perpendicularis, eritque necessariò brevior quam linea AE, quæ est obliqua.

Producatur perpendicularis AD in F, donec DF par sit AD; jungantur que puncta E, F linea FE.

1. Linea AE non potest esse perpendicularis lineæ BC.

Sint enim ex suppositione duo puncta B, C, aut duo quævis alia æquè distantia a puncto A; punctum D consequenter æquè distabit ab iisdem punctis B, C; quia linea AD supponitur perpendicularis. Ut ergo linea AE foret perpendicularis, oporteret, sicut ejus punctum A æquè distat a punctis B, C; ita ejus punctum E æquè distare ab iisdem punctis B, C, quod nullo modo esse posse, manifestè apparet, cùm & cadat inter B, & D, & ex hypothesi ipsum punctum D supponatur æquè distans a punctis B, C.

2. Linea AD brevior est linea AE. Nam, quia linea AD perpendiculariter insistit lineæ BC, linea BD similiter perpendiculariter insistet lineæ AF. Sed ex constructione punctum D æquè distat a punctis A, & F. Ergo punctum E, punctum perpendicularis similiter æquè distat a punctis iisdem A, & F; hoc est linea AE par est lineæ EF. sed lineæ AE, EF simul sumptæ majores sunt AD, DF simul sumptis, cùm AF sit linea recta, scilicet brevissima mensura inter puncta A, F. Igitur AD semissis ipsius AF brevior est AE semisse ipsius AEF. Quod erat demonstrandum.

Corollarium, sive evidens ex hac propositione illatio.

Sequitur ex hac propositione, duas lineas rectas eidem lineæ

perpendiculariter insistentes nunquam posse concurrere, licèt in infinitum producantur. Si enim convenirent in aliquo puncto, verum esset dicere, ab illo concursus puncto ductas esse duas perpendiculares eidem lineæ, quod nullo modo fieri posse demonstratum est præced. hac propos.

PROPOSITIO V.

Lineæ obliquæ ab eodem puncto ductæ, eò longiores sunt, quò magis distant a perpendiculari. (fig. 9.)

A communi puncto A linea quidem A D perpendiculariter; lineæ verò A E, A B obliquè insistanti lineæ B C; linea A B longior erit linea A E. Producatur A D in F, donec D F æquetur D A; ducanturque F E, F B.

Quoniam A D perpendicularis est ad B C, necesse est, B D quoque esse perpendicularem ad A F. Quod cùm ita sit, sicut punctum D ex suppositione æquè distat a punctis A, F; ita reliqua omnia puncta perpendicularis B D æquè distabunt ab iisdem punctis A, F. Igitur B A æquatur ipsi B F, sicuti & E A ipsi E F. atqui A B F cùm contineat A E F, major est, quam A E F. Ergo A B semissis ipsius A B F, major est A E semisse ipsius A E F.

PROPOSITIO VI.

Ex tribus, quæ inter se comparari possunt, scilicet Perpendiculari, Obliqua, & Distantia perpendiculi, si duo sunt æqualia, sequitur, etiam tertium esse æquale. (fig. 10.)

Primus Casus. Esto perpendicularis A D æqualis sibimetipsi; B D distantia perpendiculi æqualis ipsi D C alteri distantiæ perpendiculi; etiam obliquæ A B æqualis erit obliquæ A C.

Nam linea A D cùm perpendicularis sit lineæ B C, & punctum D ex suppositione æquè distet a punctis B, C, quodlibet aliud punctum, ut A, perpendicularis æquè distabit ab iisdem punctis B, C. Duæ igitur obliquæ A B, A C, quæ mensurant hujusmodi distantiam, erunt æquales.

Secundus Casus. Si perpendicularis perpendiculari æquetur, & obliqua obliquæ, etiam distantiæ perpendiculi erunt æquales.

Cum

Cùm enim perpendicularis eadem ſit, & duæ obliquæ inter ſe æquentur, ſequitur ex quinta propoſit. h. l. diſtantiam perpendiculi BD parem eſſe diſtantiæ perpendiculi CD, quia per illam propoſitionem obliquæ eo ſunt longiores, quo remotiores ſunt a perpendiculo, clarum autem eſt, majorem perpendiculi diſtantiam daturam majorem obliquam, niſi iſtę diſtantiæ forent æquales.

Tertius Caſus. Si obliqua obliquæ, & diſtantia perpendiculi par ſit diſtantiæ perpendiculi, etiam perpendicularis par erit perpendiculari.

Eadem eſt demonſtratio, quæ caſus præcedentis. Solùm conſiderandæ ſunt BD, CD, tanquam perpendiculares, & AD tanquam diſtantia perpendiculi, clarum enim eſt, cùm BD æquetur ipſi CD, & BA ipſi CA, etiam AD neceſſariò æquari ipſi DA, ſcilicet ſibimetipſi.

PROPOSITIO VII.

Si duabus lineis obliquis, ut AB, AC, inæqualibus inter ſe, & non ad eandem partem inclinatis a puncto A ad lineam DC ductis æquentur duæ aliæ lineæ inæquales inter ſe, ut FG, FH ſingulæ ſingulis a puncto F ad lineam GE ductæ, & BC diſtantia punctorum ſectionis duarum primarum æquetur ipſi GH diſtantiæ punctorum ſectionis duarum poſtremarum, duo puncta A, F, a quibus ducuntur, æque diſtabunt a linea, ad quam illæ ductæ ſunt. (fig. 11.)

Nam per ultimum caſum præced. propoſ. cùm obliquæ æquentur obliquis, ſcilicet AB, & AC ipſis FG, & FH, & puncta ſectionum BC, GH, diſtantiæ perpendiculi, ex ſuppoſitione ſint æquales, neceſſe eſt, etiam perpendiculares AI, FK inter ſe æquari. Ultima hæc propoſitio magnum habet uſum, multumque intereſt eam penitus tenère.

LIBER SECUNDUS.

De Parallelis.

POstquam primo libro considerata est proprietas linearum rectarum, quæ est aut perpendiculariter, aut obliquè sibi invicem occurrere, in præsenti considerandæ est proprietas opposita, quæ est sibi invicem nunquam occurrere.

PROPOSITIO I.

SI linea, ut AB, perpendiculariter insistat uni lineæ, ut CD, & obliquè alteri, ut EF, quævis alia linea, ut GH, quæ perpendicularis sit ad CD, necessariò erit obliqua ad EF, & omnium brevissima erit illa, quæ propior erit inclinationi linearum CD, EF, hoc est proximior puncto, in quo duæ illæ lineæ productæ sibi invicem occurrerent. (fig. 12.)

Nam si ex puncto A ducatur perpendicularis ad C D, hæc occurret lineæ CD, aut præcisè in puncto H, aut intra puncta B, H, aut ultra punctum H.

Si occurrit intra puncta B, H, ducantur aliæ perpendiculares, & obliquæ, ut in figura, donec vel attingant, vel transeant punctum H. In omnibus casibus ostendetur, lineam G H uni esse perpendicularem, alteri verò obliquam. Ut, quoniam A B perpendicularis est ad C D, A I erit obliqua ad C D, & consequenter A I major erit, quam A B per 4. proposit. lib. 1. Et comparando omnes, quæ sequuntur, lineas, demonstrabitur, primò lineam L H majorem quidem esse quavis præcedentium; minorem verò linea G H per eandem propositionem, deinde G H esse obliquam ad E F, cùm H L sit perpendicularis. Si verò linea A I occurrit puncto H, eadem erit demonstratio. Quod si linea A I prætergrediatur punctum H, idem ostendetur, erecta ex puncto I perpendiculari super C D.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI linea, ut AB, perpendicularis sit uni lineæ, ut CD, & obliqua alteri, ut EF, & alia linea GH perpendicularis sit ad EF, obliqua verò ad CD, linea GH erit brevior linea AB. (fig. 13.)

Ex puncto enim H ducatur HI obliqua ad EF, & perpendicularis ad CD, hæc per præced. propos. brevior erit linea AB, & per 4 propos. lib 1. major linea GH. Multo ergo minor erit linea GH, quam linea AB.

PROPOSITIO III.

SI eadem linea, ut AB, perpendicularis sit duabus lineis CD, EF, quarum alia linea, ut GH, quæ perpendicularis sit uni CD, vel EF, erit quoque perpendicularis alteri; eritque insuper perpendicularis AB æqualis. (fig. 14.)

Ducantur enim per punctum G lineæ IGN, LGM, erunt hæ necessariò obliquæ ad lineam AB productam in I, quia linea AG ex hyporh. illi perpendicularis est. Quo posito, sequitur per 1. h. l. lineam GH æquari lineæ perpendiculari AB, nam si lineæ AB addatur, aut ab ea auferatur aliqua minor portio, lineæ AB, GH inæquales erunt. Ut si supponatur portio AL auferri a linea MGL, reliqua LB minor erit, quam GH per 1. propos. h. l. Et contra si supponatur portio IA addi a linea IGN per eandem propos. IAB major erit, quam GH; quoniam tam IB, quàm GH perpendiculariter insistunt lineæ CD, & obliquè lineæ IN. Linea igitur AB æquatur lineæ GH, cùm illi possit nihil vel addi, vel demi, quin sit inæqualis lineæ GH.

Ut autem ostendatur, perpendicularem GH reapse perpendiculariter insistere utrique lineæ CD, EF, memoria repetatur præcedens propos., in qua ostensum est, si una tantùm linea perpendicularis est ad CD, & obliqua ad EF, quamlibet aliam lineam, quæ sit perpendicularis ad CD, fore obliquam ad EF. Ergo si GH, quæ est perpendicularis ad CD, esset obliqua

ad

ad EF, ſequeretur, lineam AB, quæ eſt perpendicularis ad CD, eſſe obliquam ad EF, quod eſt contra hypotheſim.

PROPOSITIO IV.

PEr datum punctum, ut A, parallelam ducere datæ lineæ, ut BC, hoc eſt per punctum A lineam ducere, cujus omnia puncta ſemper æquè diſtent a linea BC, ita ut hæ duæ lineæ utrinque in infinitum protractæ nunquam conveniant. (fig. 15.)

Ex puncto dato A ad BC agatur perpendicularis AF. Ad idem punctum A ſuper AF ducta perpendicularis EA producatur, ſi opus eſt, in D. linea DGAE erit parallela datæ lineæ BC.

Cùm enim ex conſtructione linea AF perpendicularis ſit utrique lineæ DE, BC, ſequitur ex præced. propoſ. quamvis aliam lineam, ut HG, quæ ſit perpendicularis uni ex iis lineis, fore perpendicularem & alteri, & æqualem perpendiculari AF. Singula igitur puncta G, A, æquè diſtabunt a data BC, nam diſtantia unius puncti a linea eſt menſurata per perpendicularem, quæ eſt breviſſima omnium. Quodlibet ergo lineæ DE punctum æquè diſtabit à linea BC. Tota igitur linea DE ſemper erit in eadem diſtantia a linea BC, in quo conſiſtit parallelismus.

Sequitur ex hac conſtructione, datis linea BC, & puncto A, ſi ducatur perpendicularis AF, & alia perpendicularis GH priori, lineam, quæ puncta A, G conjunget, fore parallelam quæſitam.

Alia conſtructio. (fig. 16.)

Ex puncto dato A ducatur utcunque obliqua AG ad lineam BC. Ex puncto A tanquam centro deſcribatur portio circuli, cujus radius AG, & ex puncto G, ut centro deſcribatur arcus AH, cujus radius GA. Accipiatur arcus GF par arcui AH. Ex puncto F, & dato puncto A agatur linea DFIAE. hæc erit parallela ad lineam BC.

Nam obliqua AG æquatur ipſi GA, hoc eſt ſibimetipſi. linea FA æquatur ipſi GH, cùm ſint radii duorum circulorum aqua-

æqualium Porro cùm arcus F G, A H sint æquales ex constructione, etiam chordæ, quæ illos subtenduht, erunt æquales, scilicet rectæ F G, A H. Duæ rectæ igitur G F, G A considerari possunt tanquam duæ obliquæ inæquales inter se, & non ad eandem partem inclinatæ, ductæ ex puncto G ad lineam D E. Similiter considerari possunt duæ rectæ A H, A G tanquam duæ aliæ obliquæ inæquales inter se, & ad diversam partem inclinatæ, ductæ ex puncto A ad lineam B C Atqui hæ duæ ultimæ obliquæ inæquales inter se duabus primis æquantur singulæ singulis, scilicet recta G F rectæ A H, & recta G A rectæ A G & insuper F A distantia punctorum sectionis duarum primarum obliquarum par est ipsi G H distantiæ punctorum sectionis duarum ultimarum Ergo per 7 lib 1 quodlibet duorum punctorum A, & G, ex quibus ducuntur obliquæ, æquè distat a linea, ad quam illæ sunt ductæ Duæ igitur perpendiculares A L, G I æquantur inter se Ergo linea, quæ illas terminat, datæ lineæ parallela est.

PROPOSITIO V

Lineæ æquè inclinatæ inter parallelas sunt æquales portiones parallelarum, quas illæ secant, pariter æquantur & ipsæ quoque æquè inclinatæ sunt parallelæ. (fig. 17.)

Sint lineæ B C, A D æquè inclinatæ intra parallelas I A, L F. Ducantur ex punctis B, & A perpendiculares B E, A F, & ex punctis D, B perpendiculares D H, B G, jungantutque puncta B, D recta B D.

1. Quoniam ex hypothesi obliquæ B C, A D æqualiter inclinantur, necesse est, illarum distantias perpendiculi C E, D F æquari, sed etiam illarum perpendiculares B E, A F sunt æquales, quia sunt inter parallelas. Per primum ergo casum 6. lib 1. obliquæ B C, A D æquantur.

2 Portiones parallelarum B A, C D sunt æquales nam B A æquatur ipsi F E, cùm tam B A, quàm F E sit perpendicularis inter lineas B E, A F, sed C D æquatur ipsi F E, quia cùm C E æquetur D F, linea E D, quæ illis communis est, cùm juncta sit utrique, duas debet facere magnitudines æquales. C D igitur æquatur B A, quæ par est F E.

3. Lineæ B C, A D similiter inclinatæ, ipsæ quoque paralle-

læ ſunt. Tres enim lineæ B D, D A, A B æquantur tribus B D, B C, C D ſingulæ ſingulis. Per 7. ergo lib. 1. perpendiculares D H, B G ſunt æquales. Sunt igitur ipſæ inter parallelas.

LIBER TERTIUS.

De Lineis rectis circumferentia terminatis.

POſtquam duobus præcedentibus libris actum eſt de lineis, quæ conveniunt, deque illis, quæ nunquam convenire poſſunt, ſequitur agendum nunc eſſe de lineis rectis circuli peripheria terminatis.

Hujuſmodi lineæ poſſunt duci vel a puncto extra circulum, illumque ſecare, & tunc appellantur Secantes exteriores, ut lineæ A B, A C (*Tab. 2. fig. 18.*)

Vel poſſunt duci a puncto intra circumferentiam, ut lineæ F D, F E, & tunc dicuntur Secantes interiores.

Vel poſſunt duci a puncto extra circulum, & ita peripheriam tangere, ut tamen illam non ſecent, licèt producantur, ut lineæ G H, I K, & tunc vocantur Tangentes.

Vel poſſunt duci ex uno puncto ejuſdem peripheriæ, & ab alio puncto ejuſdem peripheriæ terminari, ut lineæ E C, L C, & tunc nuncupantur Chordæ.

Ideo hoc libro agendum erit de Chordis, de Secantibus externis, & internis, & de Tangentibus.

De Chordis.

PROPOSITIO I.

Recta, quæ chordam ſecat, tres poteſt habere conditiones; ſecare chordam perpendiculariter, ſecare chordam biſariam, tranſire per centrum circuli. Date duæ ex his conditionibus dant tertiam. (fig. 19.)

Primus Caſus. Si linea recta E A perpendicularis chordæ B C, illam in duas æquales partes dividit in puncto D, neceſſariò per cen-

centrum transit. Cùm enim linea A E sit perpendicularis, & punctum D unum ex ejus punctis ex hypothesi æquè distet a punctis B, C, necesse est, quodvis aliud hujus perpendicularis punctum æquè distare a punctis B, C, & hujusmodi perpendicularem comprehendere omnia puncta, quæ æquè distant a punctis B, C. Atqui centrum est punctum, quod æquè distat a punctis B, C, quæ sunt in circumferentia. Perpendicularis E A igitur transit per centrum.

Secundus Casus. Si linea E A perpendiculariter insistit chordæ B C, & per centrum A transit, secat chordam bifariam in puncto D. Nam cùm punctum A, quod supponitur esse centrum, æquè distet a punctis B, C, & linea E A perpendicularis sit, oportet, quodvis aliud perpendicularis punctum æquè distare a punctis B, C; sed punctum D est unum ex punctis perpendicularis. Igitur D æquè distat a punctis B, C. Divisa est ergo chorda B C in duas æquales partes.

Tertius Casus. Si linea E A transit per centrum, secatque bifariam chordam B C, perpendicularis est chordæ. Cum enim tam punctum D, quàm centrum A æquè distent a punctis B, C, linea E A ex defin. perpendicularis erit.

PROPOSITIO II.

Per tria quæcunque data puncta, ut A, B, C, non ad unam rectam posita, potest describi circumferentia. (fig. 20.)

Jungantur rectis puncta A, B, C, dividantur bifariam, & perpendiculariter lineæ jungentes A B, B C lineis F G, E D. Punctum H intersectionis perpendicularium erit centrum peripheriæ, quæ describetur intervallo H A, vel H B, vel H C.

Nam per primum casum præced. propos. lineæ F G, E D, quæ secant lineas A B, B C, quæ debent esse chordæ circuli quæsiti, perpendiculariter, & bifariam, transeunt ambæ per centrum. In utraque igitur linearum necessariò debet esse centrum, quæ cùm non possint habere nisi unum commune punctum H, illud determinant centrum circuli. Idem esset faciendum, si proponeretur inveniendum centrum alicujus dati circuli: nota oda tantùm forent tria puncta in ejus peripheria, & reliqua peragenda, quæ in propos.

Corollarium I.

Cùm habentur tria puncta alicujus circumferentiæ, tota habetur circumferentia. Cùm enim habentur tria puncta per propoſ. habetur centrum, centrum verò cum altero ex datis punctis determinat radium.

Corollarium II.

Si duæ circumferentiæ tria habeant puncta communia, reliqua omnia habebunt communia, hoc eſt eadem erunt circumferentia.

Corollarium III.

Fieri non poteſt, ut duæ peripheriæ ſe ſecent in pluribus punctis, quàm in duobus.

PROPOSITIO III.

PErpendicularis, quæ chordam bifariam ſecat, ſecat etiam bifariam arcus majorem, & minorem, quos chorda illa ſubtendit. (fig. 21.)

Biſecetur chorda AB perpendiculari CED in puncto E: hæc arcum ACB biſecabit in C, & arcum ADB in D. Ducantur chordæ AC, CB, AD, DB.

Si chorda AC æqualis eſt chordæ CB, & chorda AD chordæ BD, arcus AC, CB æquabuntur inter ſe, ſicuti & arcus AD, DB; nam ex poſtulat. in eodem circulo, aut in circulis æqualibus æquales chordæ ſubtendunt æquales arcus. atqui æqualitas chordarum AC, CB, & AD, DB clara eſt, nam cùm linea CED perpendicularis ſit chordæ AB, & punctum E ex ſuppoſitione æquè diſtet ab extremitatibus A, B, reliqua omnia hujus perpendicularis puncta, ut C, D ab iſdem extremitatibus A, B æquè diſtabunt. Linea igitur AC, quæ eſt menſura diſtantiæ punctorum A, C, æqualis erit lineæ CB, quæ eſt menſura diſtantiæ punctorum C, B; & ob eandem rationem linea AD æquatur lineæ BD. Arcus ergo AC arcui CB, & arcus AD arcui DB æquatur.

Cæ

Corollarium.

Omnis radius perpendicularis diametro dividit dimidiam circumferentiam in duas æquales partes; nam diameter considerari potest tanquam chorda, quæ subtendit dimidiam peripheriam.

PROPOSITIO IV.

SI ab extremitate alterutrius radiorum, qui arcum continent, ducatur perpendicularis alteri radio, hæc appellatur sinus arcus; & si hujusmodi perpendicularis producatur usque ad peripheriam, evadit chorda arcus, qui est duplus arcus dati. (fig. 22.)

Esto datus arcus BC comprehensus radiis AB, AC; ab extremitate unius radii, ut B, ducatur ad alterum perpendicularis BE, hæc ex definit. est sinus arcus BC. Si hujusmodi sinus BE producatur ad punctum D peripheriæ, arcus BCD subtensus chorda BED duplus erit arcus BC.

Linea enim CA cùm transeat per centrum, & ex constructione perpendicularis sit lineæ BD per præcedentes propos. non solum secat hujusmodi lineam, seu chordam BD bifariam in E; sed etiam dividit arcum BCD in æquas partes in puncto C. Hinc sequitur ergo, arcum BCD duplum esse arcus dati BC, & chordam BD duplam esse sinus BE. Hinc aliter definiri potest Sinus.

Sinus Arcus est semissis chordæ, quæ subtendit arcum duplum ejus, cujus est sinus. Hæ propositiones, & definitiones maximè conferunt ad eorum, quæ sequuntur, intelligentiam.

PROPOSITIO V.

IN eadem circulo, aut in circulis æqualibus sinus æquales dant arcus æquales, & arcus æquales dant sinus æquales. (fig. 23.)

Nam cùm BF sinus arcus BD æquetur ex hypoth. CG sinui arcus CE, recta BI dupla primi sinus æquabitur rectæ CH duplæ secundi sinus: atqui duæ chordæ BI, CH cùm sint æquales, subtendunt arcus

arcus æquales, ſcilicet I D B, & C E H. Igitur illorum ſemiſſes D B, C E erunt æquales. Eadem ratione demonſtrabitur ſecunda pars Propoſitionis.

PROPOSITIO VI.

SI plures peripheriæ ſint concentricæ, hoc eſt, idem habentes centrum, ducanturque radii ex centro terminati ad maximam peripheriam, hujuſmodi radii abſcindent in reliquis peripheriis arcus, qui ſinguli eandem rationem habebunt ad ſuammet peripheriam, quam arcus maximæ ad ſuam. (fig. 24.)

Nam ſi conſideretur linea A L ita circumagi, ut puncto A circa ſeipſum ducto, ejus extremitas L deſcribat maximam circumferentiam, manifeſtum eſt, quodlibet intermediorum punctorum, ut G, D, deſcripturum quandam circumferentiam concentricam, & futurum, ut cùm radius A L pervenerit ad punctum I, punctum D pervenerit in C, & punctum G in F, ita ut ſi L I v. g. eſt quinta pars maximæ circumferentiæ, G F quoque ſit quinta pars mediæ, & C D, minimæ. Eodem modo cùm punctum L pervenerit in H, puncta G, D pervenerint in punctis E, B, & ſic de reliquis.

De Secantibus Externis.

PROPOSITIO VII.

OMnium externarum ſecantium brevissima eſt, quæ producta per centrum tranſiret. (fig. 25.)

Nam ſi ſecans B D, ſi producatur, ſupponatur tranſire per centrum A, ab eodem centro A ducatur radius A C ad punctum C, ubi terminatur quælibet alia ſecans, ut B C. Clarum eſt A C B ſimul ſumptam continere A B. Igitur A C B major eſt A B. Si ergo a duabus quantitatibus inæqualibus demantur radii A C, A D, qui ſunt æquales, reſidua B C major erit reſidua B D.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

OMnium externarum secantium maxima est, quæ per centrum transit. (fig. 26.)

Nimirum secans AD, quæ per centrum transit, major est secante AC. Ducatur radius BC: Secans AD æqualis est duabus lineis AB, BC; est enim eadem quantitas, scilicet BD, BC addita quantitati AB: atqui lineæ AB, BC majores sunt linea AC, cum illam contineant. Igitur AD major est, quàm AC

De Secantibus Internis.

PROPOSITIO IX.

OMnium internarum secantium maxima est, quæ per centrum transit. (fig. 27.)

Nam secans ABD, quæ per centrum B transit, æquatur duabus lineis AB, BC simul sumptis ob æqualitatem radiorum BD, BC: sed AB, BC continent AC, ac proinde majores sunt ipsa AC. Ergo AD major est, quàm AC.

PROPOSITIO X

OMnium secantium internarum minima est, quæ productæ per centrum transiit. (fig. 28.)

Secans DB producatur usque ad centrum A. Ex quo ad punctum C, ubi terminatur alia secans BC, ducatur radius AC: BD brevior erit, quàm BC. Tota enim AD, quæ radius est, æquatur radio AG sed AB, BC continent AG. Igitur AB, BC majores sunt, quàm AD. Ablata ergo AB communi, reliqua BD brevior erit reliqua BC.

De

De Tangentibus.

PROPOSITIO XL.

OMnis linea perpendicularis extremitati radii tangit circulum; nec nisi in unico puncto tangit. (fig. 29.)

Ad punctum B extremitatem radii A B ducatur perpendicularis D B E. Jam certum est, illam tangere circulum, punctum enim B commune est & radio A B, & lineæ D B E. Ut autem ostendatur, hanc illum in alio puncto, ut C, non tangere, ducatur ex centro A linea A C. Clarè patet, hanc esse tangenti obliquam, nam ex puncto A unica tantùm duci potest perpendicularis. Sed per 4. I 1 perpendicularis A B brevissima est omnium, quæ cadere possunt supra tangentem D E. Obliqua A C igitur major est perpendiculari A B, quæ radius est. Ergo extremitas C cadit extra circulum; ideoque punctum C non est commune & circulo, & tangenti.

PROPOSITIO XII.

Fieri non potest, ut vel unica tantùm linea recta inter circulum, & tangentem transeat, licet infinitæ circulares transire possint, quæ non nisi in unico puncto contingentiæ conveniant. (fig. 30.)

1 Ducta tangente D B E, si dicatur alia recta, ut B F, transire posse inter tangentem, & circulum, quin circulum secet; hoc fieri nequaquam posse, demonstratur. Tangens E D perpendicularis est extremitati radii A B. Linea igitur F B radio A B obliqua est; & vicissim radius A B obliquus lineæ F B. Ex centro igitur A duci potest ad F B perpendicularis, ut A C. Hæc perpendicularis A C brevior erit radio A B per 4. I 1. Punctum igitur C extremitas perpendicularis A C erit intra circulum, nec peripheriam attinget. Ergo linea B C F necessariò intra circulum transit.

2 Esto circulus (*fig.* 31) minor, cujus radius A C, & tangens E C F, si radius A C infinitè producatur, & inter radium productum sumantur infinita puncta, ut B, tanquam centra nova-

novarum circumferentiarum, quarum aliquis radius BC, Omnes hæ circumferentiæ unum tantùm punctum C, punctum contactus, commune habent. Si enim dicas, aliquod punctum, ut G, esse commune duabus peripheriis, ex puncto A centro minoris circuli ad punctum G ducatur linea AG.

Linea AC radius minoris circuli est secans interna respectu majoris circuli, &, si produceretur, transiret per ejus centrum B. Similiter linea AG est secans interna respectu ejusdem minoris circuli: Sed per 10. hujus l. linea AC necessariò brevior est quavis alia secante interna a puncto A ducta. Linea igitur AC brevior est, quàm linea AG. Ergo linea AG major est radio minoris circuli, Quare ejus extremitas G est extra peripheriam minoris circuli, Ideoque puncta G, & D non sunt idem punctum. Idem ostendetur de quocunque alio puncto, utcunque accepto in omnibus aliis peripheriis possibilibus habentibus centrum in linea CB in infinitum protracta, & lineam ECF tangentem.

Corollarium I.

Nullo modo ab aliquo puncto, quod non sit centrum, possunt duci ad peripheriam tres lineæ, quæ sint æquales.

Demonstratum enim est, secantem internam, quæ per centrum transit, majorem esse quavis alia ab eodem puncto ducta; & secantem internam, quæ, si produceretur, per centrum transiret, breviorem esse quacunque alia; ex quo clarè sequitur, omnes intermedias esse inæquales, & consequenter duas ad summum internas secantes æquales inter se haberi posse, quarum altera ex una parte, altera ex alia erit respectu illius, quæ per centrum transit.

Corollarium II.

Punctum, ex quo tres ad peripheriam duci possunt inter se æquales lineæ, necessariò centrum est circuli.

PROPOSITIO XIII.

A dato puncto, ut A, extra circulum BCD, duas ejusdem circuli tangentes ducere, & ostendere, illas inter se æquari. (Tab. 3. fig. 32.)

Ex puncto E centro circuli, intervallo E A describatur circulus I A H. Ad punctum C, ubi radius E A minorem secat circulum, ducatur perpendicularis F C G, quæ circumferentiæ punctis F, G terminetur; hæc perdendicularis erit tangens respectu minoris circuli, & chorda respectu majoris. Sumpta circino longitudo F G transferatur ex dato puncto A ad puncta majoris circumferentiæ I, H, ducanturque lineæ A I, A H. Erunt hæ tangentes minoris circuli.

Ex constructione enim F G tangens est, item F G, A I, A H sunt chordæ æquales. Æquè distant igitur a centro E. atqui distantia centri E a chorda F G mensuratur radio E C. Ergo distantiæ reliquarum duarum chordarum A I, A H æquè a centro distantium mensurabuntur radus E B, E D. Hi duo ergo radii illis sunt perpendiculares, alioquin non dimetirentur distantiam a centro. Duæ igitur chordæ A I, A H perpendiculares sunt singulæ suo radio. Ergo per 11 hu l. tangunt circulum in punctis B, D.

Ex qua demonstratione colligitur, duas tangentes ductas ex dato puncto usque ad puncta contingentiæ, esse æquales; sunt enim per 1. hu. l. semisses chordarum æqualium.

Admonitio.

Antequam ulteriùs progrediamur, non erit, opinor, abs re paulisper in propos. 12 hujus libri consideratione immorari. Insunt enim in ea, quibus sustn humanum ingenium infirmitatem agnoscat dum demonstratur, dari veritates, quæ manifestissimæ sunt, si singillatim considerentur, quarum tamen connexio nullo modo fieri potest, ut concipiatur; quæque ejus naturæ sunt, ut una aliam destruere videatur.

Ostensum enim est, lineam rectam omni expertem latitudine pertransire non posse inter circulum, & tangentem. Ergo spacium, quod intercedit inter tangentem, & circulum est infinitè parvum; Nihilominus dividi potest hoc spacium per se quidem infinitè parvum in alia infinita spacia minora; possunt enim duci inter circulum, & tangentem infinitæ aliæ circumferentiæ, quæ nnn concurrunt, nisi in unico contingentiæ puncto. Quare evidenter habetur unum spacium infinitè parvum in alia infinita spacia divisum. Hoc jam demonstratum est verùm clare ne intellectum?

Igitur

Igitur quò melius intelligatur, concipiatur ſphæra perfecta poſita ſuper plano: ſphæra hæc inſiſtit uni tantùm puncto, quod omni extenſione caret, alioquin circulus, & tangens haberent plura puncta communia. Concipiatur deinde alia ſphæra prima major ſuper eodem poſita plano. Sphæra hæc major non niſi unico puncto innititur, ſicuti & prima; cùm tamen luce clarius ſit, curvaturam hujus minorem eſſe curvatura illius, & conſequenter, excepto puncto contactus, circumferentiam majoris ſphæræ minus diſtare a tangente, quàm circumferentiam minoris; licèt jam demonſtratum ſit, ſpacium inter tangentem, & circumferentiam minoris ſphæræ ita eſſe parvum, ut magnitudo infinitè parva ſecundum latitudinem, cujuſmodi eſt linea recta, illud pertranſire non poſſit. Quod ſanè nihil aliud eſt, quàm ſpacium hoc eſſe infinitè parvum, & tamen infinita alia ſpacia in ſe continere.

Quidquid oſtenditur in ſublimioribus Geometriæ ſpeculationibus de Aſſymptotis, de ſpaciis aſſymptoticis, de infinitè parvis Leibnitzii, & Hoſpitalii, quorum principia adeo fecunda ſunt, uno verbo quidquid de infinito demonſtratur, ejuſdem eſt naturæ. Quaſdam ſibi veritates humanum ingenium ſatis perſuadet; verùm de ſua infirmitate fateri cogitur, cùm in eo contendit, ut intelligat, qua ratione fieri queat, ut hujuſmodi veritates unà ſubſiſtant. Sed ſicuti hominum mens angustis definitur terminis, illique omnium Creator non niſi finitum lumen inſevit, ita decet, noſtræ nos conditionis recordari. Nihil enim magis a ratione abſonum foret, quàm inficiari illas veritates, quas ſatis intelligimus, ſed earum connexionem minimè tenemus. Veritates haſce ideo comprehendimus, quia certam quandam rationis partem habemus; ſed connexionem non intelligimus, quia divinitate caremus, noſtraque ratio infinita non eſt. Injuria ergo oppugnatur Geometria infinitè parvorum, & Geometria indiviſibilium — nam dantur quidem aliqua, quæ in infiniti natura non comprehenduntur, quod revera incomprehenſibile eſſe debet, verùm aliud eſt illud comprehendere, aliud de ejus exiſtentia convinci. Ingenuè igitur fateor, omnino mihi perſuaſum eſſe de 12 propoſitionis veritate, & illud tamen ſimul fateor, me non poſſe illam comprehendere.

Quod ſi non poſſum non fateri, veritates, quæ ſimul pugnare videntur, eſſe in Geometria, ubi ſe humana mens clariſſime videre jactat, multo eſt æquiſſimum, me de meipſo ſentire demiſſè,

mísse, ubi de veritatibus agitur, quæ meum captum transcendunt, atque semper repetere memoria, qui me creavit, non omnia mihi patefacere debuisse.

LIBER QUARTUS.

De Angulis.

CUm actum jam sit præcedentibus libris de lineis perpendicularibus, de obliquis, de parallelis, & de aliis, quæ circumferentia terminantur, naturalis doctrinæ ordo exigit, ut de angulis, qui superficiei species quædam sunt, in præsenti agatur.

Definitiones.

Angulus est superficies indeterminata secundùm longitudinem linearum, quæ illam comprehendunt, determinata verò concursu duarum linearum in aliquo puncto, quod Vertex dicitur, & portione alicujus peripheriæ, habentis eundem verticem tanquam centrum.

Ut spacium D B A C E (*fig.* 33.) est angulus, cujus vertex est punctum A, latera verò lineæ D B A, E C A. portio autem circumferentiæ D E, quæ determinato graduum constat numero, est hujus anguli mensura.

Angulus tribus fere litteris designatur, quarum media verticem indicat. Diligenter tamen observandum est, ad angulum A mensurandum adhiberi posse tam portionem circumferentiæ minoris B C, quàm portionem majoris D E, cùm utraque eodem constet graduum numero; ideoque angulus B A C, quà angulus est, non differt ab angulo D A E. Licet enim hujus crura revera majora sint, mensura tamen anguli revera eadem est, & parem graduum numerum continet. Ut si angulus D A E contineat 25 gradus, angulus B A C erit pariter angulus 25 graduum, nec ullum ejus mensuræ erit discrimen; semper quippe remanebit 25 graduum, quamvis latera D A, A E in infinitum producerentur.

Si duo alicujus anguli latera æqualia sint, (*fig.* 34.) angulus isosceles dicitur. In quo casu si laterum extremitates jungat recta,

recta, manifestum est, illam fore chordam ejus arcus, qui tanquam radios habebit latera anguli.

Si latera sint inæqualia, (*fig.* 35.) & ex uno ad aliud perpendicularis demittatur, illa tum erit sinus anguli; ut in fig. 35. linea B C est sinus, & in fig. 34. B C est chorda.

Quod si linea, quæ latera connectit, neque chorda sit, neque sinus, ut in fig. 36. basis anguli simpliciter dicitur, quod nomen convenit omnibus lineis latera conjungentibus.

Porro hinc habentur tres modi angulos mensurandi, per arcus, per sinus, per chordas, modus tamen absolutus, & naturalis mensurandi angulos est considerare arcus magnitudinem, hoc est graduum numerum, quem arcus continet. Hinc angulus dividitur in rectum, acutum, & obtusum.

Angulus rectus est angulus 90 graduum; ex quo sequitur, lineam, quæ perpendiculariter insistit alteri lineæ (*fig.* 37.) duos efficere angulos rectos. Ut linea A C perpendiculariter insistens lineæ B D facit angulos hinc A C D, illinc A C B singulos constantes 90 gradibus: si enim ex puncto C, ut centro, describatur dimidia peripheria, hæc per coroll. p. 3. præc. lib. divisa erit in duas partes æquales, hoc est in duos arcus, qui singuli 90 gradus continent.

Si autem linea A C obliquè cadat (*fig.* 38.) supra B D, duos inæquales facit angulos, scilicet A C D, qui minor est 90 gradibus, & acutus appellatur, & A C B, qui major est 90 gradibus, & obtusus dicitur. Manifestum tamen est, hos duos inæquales angulos simul sumptos æquari dimidiæ peripheriæ, hoc est duobus rectis, vel, quod idem est, 180 gradibus, qui efficiunt semissem totius circumferentiæ, quæ est 360 graduum.

PROPOSITIO I.

Anguli ad verticem oppositi sunt æquales. (fig. 39.)

Duæ lineæ B A E, C A D se secent in A. Anguli B A C, D A E dicuntur ad verticem oppositi, sicuti & anguli B A D, C A E.

Ostendere oportet, angulum B A C angulo D A E, & angulum B A D angulo C A E æquari. Ex centro A, intervallo utcunque, describatur circulus. Demonstrandum solùm est, arcum F G arcui H I æqualem esse: Hoc autem per se patet;

arcus

arcus enim G F H eſt dimidia peripheria, ſeu 180 gradus; ſicuti etiam arcus F H I ablato igitur utrinque arcu F H, qui communis eſt, reſtant hinc, & inde arcus G F, & H I inter ſe æquales. Eodem plane modo æqualitas arcuum reliquorum F H, G I oſtendetur.

PROPOSITIO II.

Si plures ex variis partibus ducantur lineæ ad idem punctum terminatæ, quotcunque tandem ſint, omnes anguli, quos illæ comprehendent, ſimul ſumpti æquivalebunt quatuor angulis rectis. (fig. 40.)

Ex puncto nanque concurſus deſcribatur peripheria, dimetietur hæc omnes differentes angulos, ideoque omnes ſimul ſumpti æquantur 360 gradibus, ſeu quater 90 gradibus, hoc eſt quatuor rectis.

SECTIO I.

De modo conſiderandi angulos ſecundum eorum ſinus.

Cùm duo anguli mutuò inter ſe comparantur, conſiderari poteſt vel æqualitas eorundem angulorum, vel æqualitas eorum ſinuum, vel tandem æqualitas laterum, quæ tanquam radii ſumuntur. Ex quibus duæ æqualitates datæ dant tertiam.

PROPOSITIO III.

Si duo anguli habeant & radium, & ſinum æquales, inter ſe æquales ſunt. (fig. 41.)

Sint duo anguli A B D, E F H, quorum radii B A, F E, & ſinus A C, E G æquentur inter ſe. demonſtrandum eſt, arcus A D, E H eſſe æquales, ex quo ſequitur æqualitas angulorum.

Quoniam duo radii ſunt æquales, etiam circuli habentes puncta B, & F, tanquam centra, erunt æquales. Item cum duo ſinus A C, E G & ſint æquales, & ſint ſemiſſes chordarum æqualium, dupla lineæ A C æquabitur duplæ lineæ E G; ſed dupla lineæ A C, & dupla lineæ E G erunt duæ chordæ æquales

duo-

duorum circulorum æqualium. Illæ igitur ſubtendent arcus æquales. Arcus igitur duplus ipſius arcus A D æquabitur arcui duplo arcus E H. Quare arcus A D par eſt arcui E H. Ergo anguli ſunt æquales.

Reliqui duo propoſitionis caſus, qui frequentiorem non habent uſum, eadem facilitate demonſtrantur.

PROPOSITIO IV.

Si linea obliqua cadat inter parallelas, fiunt duo anguli acuti, & duo obtuſi, acutus autem reſpectu acuti, & obtuſus reſpectu obtuſi alterni appellantur, & hujuſmodi anguli alterni ſunt æquales. (fig. 42.)

Sint parallelæ C B A, D E F, obliqua verò D A; oſtendendum eſt angulum C A D æquari angulo A D F, qui alternus illi eſt.

Quod ut oſtendatur, ex puncto D tanquam centro, intervallo D A deſcribatur portio circuli A F H, ſicuti ex puncto A tanquam centro, intervallo A D portio circuli D C G. Certum eſt, duos circulos eſſe æquales, habent enim eundem radium. Jam verò, ſi ex punctis D, A ducantur perpendiculares D B, A E ad C A, D F, erit D B ſinus arcus D C, & eadem ratione A E erit ſinus arcus A F. ſed hi duo ſinus, cùm ſint perpendiculares inter eaſdem parallelas, ſunt neceſſariò æquales. Radius igitur æquatur radio, hoc eſt A D æquatur ipſi D A, & ſinus æquatur ſinui. Ergo & arcus arcui, & angulus angulo æquatur per præced. propoſ.

Hoc etiam clariùs patet, ſi conſideretur, perpendiculares D B, A E ſemiſſes eſſe chordarum D G, A H. Quare chorda chordæ par eſt: atqui ex natura circuli chordæ æquales in circulis æqualibus ſubtendunt æquales arcus. Ergo arcus D C G, arcui A F H æquatur. Ergo ſemiſſis D C æquatur ſemiſſi A F. Ergo anguli ſunt æquales.

PROPOSITIO V.

Quivis angulus unà cum duobus angulis, quos cum baſi efficiunt ejus latera, æquatur duobus rectis, hoc eſt 180 gradibus. (fig. 43.)

Datus

Datus angulus esto B A C, cujus vertex A, basis B C; ostendendum est, datum angulum B A C unà cum angulis A B C, A C B simul sumptis, æquari 180 gradibus.

Per verticem A ducatur D A E parallela basi B C Constat, duo latera A B, A C cum linea D A E efficere tres angulos duobus rectis æquales; cum dimidia circumferentia F H G, cujus centrum A, mensurentur: sed per præced. propos. angulus D A B æquatur angulo basis A B C, & angulus E A C angulo A C B. Ergo idem est valor duorum angulorum D A B, E A C, ac duorum ad basim A B C, A C B sed duo primi cum angulo B A C ad verticem æquivalent duobus rectis. Igitur & reliqui duo, scilicet anguli ad basim cum dato angulo B A C duobus æquales sunt rectis.

Corollarium I.

Qui cognosceret duos ex his angulis, necessariò quoque tertium cognosceret; nam si duo ex his angulis simul sumpti æquivalent, puta 130 gradibus, necesse est, tertium esse 50 graduum, ut unà cum duobus reliquis conficiat 180 gradus.

Corollarium II.

Si angulus ad verticem rectus est, duo ad basim anguli simul sumpti æquivalent uni recto.

PROPOSITIO VI.

Si linea sumpta ut basis alicujus anguli producatur, efficiet ad eam partem, ad quam producta erit unà cum altero datis angulis latere novum angulum, qui angulus externus dicitur; hic semper æquatur duobus internis oppositis, hoc est angulo verticali, & reliquo basis angulo. (fig. 44.)

Producta enim linea B C, sumpta tanquam basi, usque in D, oritur novus angulus A C D, qui cum angulo A C B duobus rectis æquatur ex defin. hu. lib. atqui idem angulus A C B unà cum angulo verticali A, & reliquo ad basim angulo B per præced. prop. æquatur duobus rectis. Igitur angulus verticalis A, & an-

& angulus ad baſim B ſimul ſumpti æquantur angulo externo A C D.

PROPOSITIO VII.

SI eadem linea ſecet plures parallelas, ſecabit omnes eadem obliquitate. (fig. 45.)

Angulus enim D A E æquatur angulo B A C ad verticem oppoſito per 1 hu. lib. Angulus autem B A C alternus eſt angulo G F H; ideoque æqualis angulo I F L illi ad verticem oppoſito: Angulus verò I F L ſimiliter alternus eſt angulo N M O oppoſito ad verticem angulo P M Q. Ergo, &c. Si infinitæ forent parallelæ, idem ſemper oſtenderetur, & omnes anguli acuti omnibus ad verticem oppoſitis acutis, & omnes obtuſi omnibus obtuſis æquarentur.

SECTIO II.

De modo, quo baſes conſiderari poſſunt tanquam chordæ.

PROPOSITIO VIII.

UT baſes tanquam chordæ conſiderari poſſint, dictum jam eſt, duo latera, quæ angulum comprehendunt, æquari oportere, ſunt enim radii ejuſdem circuli. Quibus poſitis, cùm angulus iſoſceles confertur cum alio angulo iſoſceli, tres æqualitates poſſunt conſiderari, æqualitas ſcilicet laterum, æqualitas angulorum, & æqualitas baſium; quarum æqualitatum duabus datis, datur etiam tertia. (fig. 46.)

Primus Caſus. Si latus A B æquetur lateri E D, & baſis A C baſi E F, etiam angulus A B C angulo E D F æquabitur. Cùm enim radius ſit æqualis radio, etiam circulus circulo erit æqualis; & cùm chorda chordæ æquetur, ſubtendunt illæ arcus æquales. Ergo arcus A G C arcui E H F æquatur. Ergo angulus A B C par eſt angulo E D F.

Secundus Caſus. Si lateri A B latus E D, & angulo A B C angulus E D F æquentur, etiam baſi A C baſis E F æquabitur,

Nam quia radii A B, E D ſunt æquales, circulo circulus æqualis eſt; atqui ex hypot. etiam anguli ſunt æquales. Igitur etiam arcus A G C, E H F debent eſſe æquales. Ergo chorda, ſeu baſis A C baſi E F par eſt.

Tertius Caſus. Si angulus A B C par ſit angulo E D F, & baſis A C baſi E F, etiam latus A B æquale erit lateri E D. Anguli namque cùm ſint æquales, arcui A G C arcui E H F æqualis erit, ſed chorda A C ex ſuppoſitione æquatur chordæ E F. Ergo neceſſe eſt, radium A B, radio E D parem eſſe, alioquin circuli inæquales forent, & in duobus circulis inæqualibus duæ chordæ æquales non ſubtenderent arcus æquales, quod eſt contra hypotheſim.

SECTIO III.

De baſi, prout baſis eſt, ſimpliciter conſiderata, hoc eſt, cùm neque chorda, neque ſinus anguli eſt.

PROPOSITIO IX.

Si angulo A B C angulus D F G, & latera F D, F G lateribus B A, B C ſupponantur æquari, etiam baſes A C, D G pares erunt. (Tab. 4. fig. 47.)

Si enim intelligatur, unam ex his figuris alteri ſuperimponi, omnino neceſſe eſt, tria puncta A, B, C tribus punctis D, F, G congruere, ita ut prima figura a ſecunda non niſi poſitione differat, & quævis trium linearum cuivis trium reliquarum correſpondeat.

Eodem ratiocinio oſtenditur, ſi latera lateribus ſingula ſingulis, & baſis baſi æquentur, etiam angulos eſſe æquales.

LIBER QUINTUS.

De modo menſurandi angulos, quorum vertices non ſunt in centro circuli.

HActenus conſiderati ſunt anguli tanquam habentes ſuos vertices in centro circuli, ita ut eorum menſura determinata ſit per arcum circuli inter anguli crura contentum, nunc autem conſiderandi ſunt anguli per ordinem ad circulum, in cujus centro eorum vertices non exiſtunt.

Definitiones.

Si ſupponatur chorda CE dividere circulum in duas inæquales portiones; portio C A E minus ſegmentum; portio verò CBE majus ſegmentum nominatur (*fig.* 48.)

Angulus FCE, quem tangens FG, & chorda CE efficiunt, dicitur angulus minoris ſegmenti.

Angulus GCE ab eadem chorda, & eadem tangente factus, angulus majoris ſegmenti appellatur.

Angulus CAE habens verticem A in peripheria minoris ſegmenti, & latera terminata a chorda, angulus in minori ſegmento nominatur.

Angulus CBE habens verticem B in circumferentia majoris ſegmenti, & latera ab eadem chorda terminata, nuncupatur angulus in majori ſegmento.

Angulus quicunque ſive in majori, ſive in minori ſegmento, communi nomine angulus inſcriptus dicitur.

PROPOSITIO I. FUNDAMENTALIS

pro hujuſmodi angulorum menſura.

ANguli minoris ſegmenti menſura eſt ſemiſſis arcus, quem chorda ſubtendit. (fig. 49.)

Chorda ſito B F, & tangens in puncto B linea D B C; probandum eſt, anguli C B F menſuram eſſe ſemiſſem arcus B A F.

Ex puncto contactus B ducatur radius B E, & ex puncto E, centro circuli, ducatur diametet G H parallela chordæ, quam bifariam, & perpendiculariter ſecet linea E A Linea E A transibit per centrum, & ſecabit arcum B A F in duas æquales partes in puncto A.

Ex conſtructione angulus C B E rectus eſt; fit enim a tangente, & radio. Similiter angulus A E G rectus eſt, diameter enim cùm ſit parallela chordæ, quæ perpendiculariter ſecatur a linea E A, ipſa quoque ab eadem linea E A perpendiculariter ſecatur Duo igitur anguli C B E, A E G recti ſunt Porro angulus F B E alternus eſt angulo B E G, adeoque illi æqualis. Ablatis igitur duobus angulis alternis æqualibus, reſtabit angulus C B F minoris ſegmenti par angulo B E A ſed anguli B E A, cùm habeat verticem in centro circuli E, menſura eſt arcus B A ſemiſſis arcus B A F. Igitur anguli minoris ſegmenti illi æqualis menſura eſt eadem ſemiſſis arcus B A F a chorda ſubtenſi.

Corollarium.

Si plures circuli habeant unum commune punctum, unam habent tangentem communem; & ſi ex puncto contactus ducatur chorda uſque ad peripheriam maximi circuli, hæc abſcindet in omnibus circulis intermediis arcus, qui totidem conſtabunt gradibus, quot arcus maximi circuli. (*fig.* 50.)

Tres enim circuli A L E, A M H, A N I, cùm habeant centra puncta B, C, D, ſe tangunt in puncto A. Ex quo puncto A ſi ducatur tangens F A G, & chorda A E, hæc chorda ſubtendit in maximo circulo arcum E L A, in medio pars A H arcum H M A, & in minimo pars A I arcum I N A. Atqui hi tres arcus neceſſariò ſunt æquales, nam angulus E A F minoris ſegmenti eſt idem, ac anguli H A F, & I A F, & per præc. hanc prop. illius menſura eſt ſemiſſis cujuſvis ex tribus arcubus. Ergo &c.

PROPOSITIO II.

Anguli in ſegmento, ſive anguli inſcripti menſura eſt ſemiſſis arcus, cui angulus inſiſtit, (fig. 51.)

Oſten-

Oſtendere oportet, anguli B A C menſuram eſſe ſemiſſem arcus B F C. Ex puncto A ducatur Tangens D A E. Tres anguli D A B, B A C, C A E ſimul ſumpti æquivalent duobus rectis ex definit. præced. lib., hoc eſt 180 gradibus, ſive dimidiæ peripheriæ: ſed angulus D A B per præced. propoſ. habet pro menſura ſemiſſem arcus A B, & angulus E A C ſemiſſem arcus A C. Igitur reliqui anguli B A C menſura erit ſemiſſis arcus B F C.

Corollarium I.

Si accipiatur punctum A, ut centrum alicujus circuli, arcus hujus circuli, interceptus lateribus anguli B A C, erit ſemiſſis arcus B F C: arcus enim novi circuli erit menſura anguli; ideoque ſemiſſis arcus B F C, cui angulus A B C inititur. Arcus enim B F C oſtenſus eſt dupla menſura anguli B A C.

Corollarium II.

Si a centro circuli G ducantur duæ lineæ ad puncta B, C, angulus B G C erit duplus anguli inſcripti B A C. Geometræ ita exprimunt hanc propoſitionem: Angulus ad centrum eſt duplus anguli ad peripheriam. Nam anguli B G C menſura eſt totus arcus B F C; anguli verò B A C eſt tantùm ejuſdem arcus ſemiſſis.

Corollarium III.

Angulus minoris ſegmenti æqualis eſt angulo in majori ſegmento: (*fig.* 52.) Nam anguli C A D minoris ſegmenti menſura eſt ſemiſſis arcus A H D per 1. hu l. ſed per præc. hanc propoſ. eadem ſemiſſis eſt menſura anguli inſcripti A E D. Ergo &c.

Corollarium IV.

Omnes anguli in eodem ſegmento ſunt inter ſe æquales, habent enim omnes eandem menſuram, ſcilicet ſemiſſem arcus, cui inſiſtunt.

Corollarium V.

Angulus minoris ſegmenti C A D, & angulus in eodem minori

nori ſegmento A H D ſimul ſumpti duobus rectis æquantur; primi enim menſura eſt ſemiſſis arcus A H D, ſecundi vero ſemiſſis arcus A F E G D, hoc eſt dimidia peripheria.

PROPOSITIO III.

ANguli, qui a chorda, & a portione alterius chordæ extra circulum productæ efficitur, menſura eſt ſemiſſis arcuum, quos duæ illæ chordæ ſubtendunt. (fig. 53.)

Nimirum anguli B A F a chorda F A, & a portione B A chordæ E A B extra circulum protractæ facti menſura eſt ſemiſſis arcus E G A plus ſemiſſe arcus A H F. Ex puncto A ducatur tangens D A C. Angulus B A F æquatur duobus angulis B A C, C A F: Sed angulus B A C par eſt angulo D A E; illi enim ad verticem opponitur; & duo anguli D A E, C A F, cùm ſint anguli minoris ſegmenti, habent ſinguli pro menſura ſemiſſem ſui arcus. Totius igitur anguli B A F menſura eſt ſemiſſis eorumdem duorum arcuum E G A, A H F.

PROPOSITIO IV.

CUjusvis anguli, cujus vertex intra centrum, & circumferentiam cadit, menſura eſt ſemiſſis arcus, cui inſiſtit, plus ſemiſſe illius, qui ab ejus lateribus productis continetur. (fig. 54.)

Oſtendere oportet, anguli B A C menſuram eſſe ſemiſſem arcus B C, plus ſemiſſe arcus D E. Agatur linea E C.

Anguli A C E menſura eſt ſemiſſis arcus D E per 21 hu. lib., anguli verò B E C menſura ob eandem rationem eſt ſemiſſis arcus B C ſed angulus B A C eſt externus reſpectu duorum inſcriptorum. Ergo hic æquatur per 6 lib. 4 illis duobus. Ejus ergo menſura eſt ſemiſſis arcus B C plus ſemiſſe arcus D E.

PROPOSITIO V.

ANguli, cujus vertex extra circulum cadit, menſura eſt ſemiſſis arcus concavi minus ſemiſſe arcus convexi, cui inſiſtit. (fig. 55.)

Oper-

Oportet oſtendere, anguli B A C menſuram eſſe ſemiſſem arcus B C minus ſemiſſe arcus E D. Ducatur linea B D.

Angulus B D C externus par eſt duobus internis A B D, D A B ſed anguli A B D menſura eſt ſemiſſis arcus E D per 2 h lib Ergo, ut habeatur menſura reliqui anguli B A D, ſeu B A C, auferenda eſt ſemiſſis arcus E D a ſemiſſe arcus B C, quæ eſt menſura anguli externi B D C.

PROPOSITIO VI.

Si ſupra circuli diametrum productam plures ducantur perpendiculares, quas alia linea obliqua ducta ab extremitate diametri oppoſita parti productæ ſecet; hæc cum quavis perpendicularium efficiet angulum, cujus menſura erit ſemiſſis arcus ab obliqua ſubtenſi. (fig. 56.)

Solùm probandum eſt, anguli A C B menſuram eſſe ſemiſſem arcus A G F; nam reliqui anguli ab obliqua, & perpendicularibus facti illi ſunt æquales. Ducatur Tangens D A E. Lineæ D A E, B C ex conſtructione ſunt parallelæ. Ergo angulus A C B alternus eſt angulo C A E, ſeu F A E; atqui angulus F A E eſt angulus minoris ſegmenti, cujus menſura eſt ſemiſſis arcus A G F. Ergo etiam anguli alterni, ſeu æqualis A C B eadem erit menſura.

PROPOSITIO VII.

Angulus a duabus tangentibus factus, angulus circulo circumſcriptus dicitur; & habet menſuram dimidiam peripheriam minus arcu comprehenſo intra duas tangentes. (fig. 57.)

Probandum eſt, anguli B A C menſuram eſſe dimidiam circumferentiam, minus toto arcu B D C. Tres anguli B A C, C B A, A C B ſimul ſumpti æquantur duobus rectis, ſeu dimidiæ peripheriæ per 5. lib 4: ſed angulus, cujus vertex B, eſt angulus minoris ſegmenti, ſicuti & angulus, cujus vertex C, quorum uterque menſuram habet ſemiſſem arcus B D C. Ergo ſimul ſumpti menſuram habent totum arcum B D C. Ergo

go pro tertii anguli circumſcripti A menſura reſtat numerus graduum, qui cum arcu B D C complet dimidiam peripheriam. Si igitur a dimidia peripheria auferatur arcus B D C, reſiduus arcus erit menſura anguli circumſcripti B A C.

LIBER SEXTUS.

De Proportionibus.

DE Proportionibus uſque adhuc verba facere non licuit; ſupponunt enim illæ cognitionem linearum rectarum perpendicularium, obliquarum, parallelarum, necnon angulorum.

Definitiones.

Cùm comparantur duæ magnitudines ejuſdem generis, ut duæ lineæ, duæ ſuperficies, duo corpora, duo numeri; habitudo unius ex his magnitudinibus ad aliam, ratio appellatur; ſic habitudo numeri 2 ad 4, ſeu 8 ad 11 ratio eſt. Primus rationis terminus Antecedens, ſecundus verò Conſequens nominatur; ſic in ratione numeri 8 ad 11, 8 eſt antecedens, & 11 conſequens.

Hîc nonnulla ex Axiomatibus, quæ initio ſunt poſita, repetenda ſunt.

Totum dividi poſſe in plures partes æquales, vel inæquales.

Totum æquari omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

Si pars aliquoties repetita adæquet ſuum totum, pars aliquota appellatur, ſic numerus 2 eſt pars aliquota numeri 30, nam 2 eſt pars, quæ quindecies repetita æquatur ſuo toti, ſcilicet 30. ſimiliter 5 eſt pars aliquota 30, nam ſexies ſumpta æquivalet ſuo toti 30. At numerus 7, qui aliquoties repetitus, ſemper vel minor eſt, vel major ſuo toto 30, dicitur pars aliquanta numeri 30.

Uno verbo, pars aliquota eſt, quæ ſuum totum exactè metitur; pars aliquanta, quæ exactè non metitur.

Aliquotæ ſimiles duarum magnitudinum ſunt, quæ æquè in ſuis totis continentur, hoc eſt, ut una toties in ſuo toto continen-

tineatur, quoties altera in ſuo: ſic 2, & 4 ſunt aliquotæ ſimiles 6, & 12, ſicuti enim 2 ter in ſuo toto 6 continetur, ita etiam 4 ter in ſuo toto 12.

Manifeſtum ergo eſt, id, quod ratio appellatur, nihil aliud eſſe, quàm modum, quo antecedens continet, ſeu continetur in ſuo conſequente. Ut ratio 2 ad 4 nihil aliud eſt, quàm modus, quo 2 in 4 continetur, hoc eſt, bis. ſicuti etiam ratio 12 ad 4 nihil eſt aliud, quàm modus, quo 12 continet 4, ſcilicet ter.

Patet item, antecedentem aliquando eſſe ſui conſequentis partem aliquantam, ut in ratione 8 ad 11, hoc tamen nihil impedit, quin cognoſci poſſit modus, quo 8 in 11 continetur; hoc eſt, quin cognoſcatur ſemel cum reſiduo 3 contineri, hujuſmodi autem cognitio oſtendit, illam eſſe rationem 8 ad 11.

Ex quo pariter ſequitur, ſi antecedens, & conſequens ejuſdem rationis per eandem magnitudinem multiplicentur, eandem ſemper perſeverare rationem, ut data ratione 3 ad 6, ſi ducantur 3, & 6 in quemvis numerum, ut 4, provenient 12, & 24, quæ eſt eadem ratio ac 3 ad 6.

Omnes numeri habent unam communem menſuram, quæ eſt unitas: ſive unitas eſt pars aliquota cujuslibet numeri. Habitudo, quæ inter duos numeros reperitur, ratio numeri ad numerum dicitur.

Dantur quædam lineæ, quæ eandem inter ſe habitudinem habent, quam quidam numeri; ut ſi aliqua linea ſupponatur tertia pars alicujus alterius lineæ, minor ad majorem erit, ut 1 ad 3, & tunc duæ illæ lineæ commenſurabiles dicuntur, hoc eſt, communem aliquam menſuram habentes, ſeu quod ſunt inter ſe, ut numerus ad numerum.

Quod ſi duæ aliquæ lineæ habeant ſingulæ infinitas aliquotas, ita tamen, ut aliquota quæcunque unius nunquam poſſit eſſe aliquota alterius, tunc duæ illæ lineæ incommenſurabiles dicuntur. Dicitur quoque earum ratio ſurda, ſeu irrationalis, ſive, quod illarum ratio non eſt, ut ratio numeri ad numerum, cùm revera nullo modo inveniri poſſint duo numeri, qui eam inter ſe habitudinem habeant, quam duæ illæ lineæ.

Non ſolùm autem duæ magnitudines inter ſe conferri poſſunt, verùm etiam duæ rationes, & cum rationes, quæ comparantur, inter ſe æquales ſunt, id dicitur proportio, ut ſi com-

paretur ratio 2 ad 4 cum ratione 6 ad 12, clarè patet, has duas rationes æquales esse, ut enim 2 est semissis 4, ita 6 est semissis 12. Id scribitur hoc modo, 2 4 :: 6. 12, hoc est, duo sunt ad quatuor, ut sex sunt ad duodecim

In quo exemplo 2 antecedens, & 4 consequens primæ rationis dicitur, 6 verò antecedens, 12 consequens secundæ rationis: 2, & 12 dicuntur extrema proportionis, 4, & 6 media. Notandum tamen est, unum, eundemque terminum posse esse & consequentem primæ rationis, & antecedentem secundæ, & tunc dicitur medius proportionalis, ut cum dicitur, 2 est ad 4, ut 4 ad 8. Id autem hoc modo scribitur brevitatis ergo 2, 4, 8 —

Sicuti proportionis definitio est magni momenti, ita alia expressione familiaris reddenda est.

Jam cognoscitur itaque, tunc inter quatuor terminos proportionem dari, cùm similes aliquotæ antecedentium pari numero in suis consequentibus continentur. quatuor termini sint

9. 27 :: 18. 54
3 6

3 est tertia pars antecedentis 9, sicuti 6 tertia pars antecedentis 18, ideoque 3, & 6 sunt aliquotæ similes antecedentium. Si igitur 3 toties contineatur in consequenti 27, quoties 6 in consequenti 54, dabitur proportio inter hos quatuor terminos. Porro 3 novies est in 27, sicuti 6 novies in 54. Sic igitur quatuor termini sunt proportionales

Quod si similes aliquotæ antecedentium non metiantur exactè suos consequentes, hoc est aliquoties contineantur cum residuo; ut detur proportio, oportet, duo residua ita esse inter se, uti sunt aliquotæ similes. Habeatur proportio 9. 20 :: 27. 60 Sit 3 aliquota antecedentis 9, & 9 aliquota antecedentis 27: hæ aliquotæ sunt similes, nam sicut 3 est tertia pars antecedentis 9; sic 9 est tertia pars antecedentis 27: verùm 3 non exactè metitur consequentem 20; continetur enim sexies cum residuo 2. Ad hoc ergo, ut habeatur proportio, necesse est, ut 9 in consequenti 60 sexies contineatur cum residuo 6. Clarum autem est, 2 residuum consequentis 20 esse ad 6 residuum consequentis 60, ut 3 ad 9, hoc est, uti sunt aliquotæ similes antecedentium, ideoque, proportionem dari inter quatuor terminos 9 20 :: 27 60.

Si autem loco 3, & 9 aliquotarum similium antecedentium, accipiantur 1, & 3, idem erit, nam ut 1 novies in 9, sic pariter 3

novies

novies in 27 continetur. Igitur 1, & 3 ſunt ſimiles aliquotæ antecedentium; atqui 1 vicies in 20 conſequenti primæ rationis, & 3 vicies in 60 conſequenti ſecundæ rationis continetur. Quatuor ergo termini ſunt proportionales.

Cæterum multùm confert, illas præcipuè conſiderare proportiones, quarum aliquotæ ſimiles aliquod reſiduum relinquunt in conſequentibus, alioquin nunquam haberi poterit clara, & diſtincta idea proportionis, quæ reperitur inter quatuor magnitudines incommenſurabiles.

Si enim duæ lineæ ſint inter ſe incommenſurabiles, nunquam aliquota unius poterit eſſe aliquota alterius. Hinc tamen non ſequitur, quin inter haſce duas lineas proportio poſſit haberi; ſed ſi dentur duæ aliæ lineæ, quæ eandem inter ſe habitudinem habeant, dabitur proportio; aliquotæ enim ſimiles antecedentium eodem modo cum reſiduo hinc, & inde continebuntur in ſuis conſequentibus; quæ reſidua erunt inter ſe, ut ſimiles aliquotæ antecedentium.

Uno verbo, Proportio eſt comparatio duarum rationum æqualium, five rationes ſint ut numerus ad numerum, ſive ſurdæ.

Præcipua proprietas hujus proportionis, quæ antonomaſticè proportio geometrica dicitur, ea eſt, productum extremorum producto mediorum ſemper æquari. Quod ut univerſaliter oſtendatur, ſuppono

1. Omnem magnitudinem exprimi, deſignarique aliqua littera poſſe. Sic A B C D ſignificat, magnitudinem, quæ A nominatur, eſſe ad magnitudinem, quæ B dicitur; ut eſt magnitudo, quæ C nuncupatur, ad magnitudinem, quæ D appellatur, ſive ſint magnitudines numerorum, ſive linearum.

2. Hoc ſignum + ſignificare *plus*, hoc verò — *minus*.

3. Duos characteres ſimul poſitos, nullo mediante ſigno, ut A B ſignificare magnitudinem A ductam in magnitudinem B, ſeu productum ex A in B.

4. A B = C D ſignificare, productum ex A in B æquari producto ex C in D.

Quibus poſitis, ſit proportio geometrica A B : C D, oſtendendum eſt, productum extremorum A D mediorum B C producto æquari, hoc eſt A D = B C.

Statim memoria recolendum eſt, duas magnitudines eſſe æquales, cùm ad eandem magnitudinem eandem habent rationem. Ut ſi linea quævis ſit tertia, vel quarta pars alicujus li-

neq, quę Z dicatur, omnis alia linea, quę ſit tertia, vel quarta pars ejuſdem Z, æquabitur primę.

Reminiſci deinde oportet, duas rationes eidem rationi æquales, æquari inter ſe. Hoc per ſe patet.

Patet inſuper A D . B D :: A . B, hoc eſt, productum ex A in D eſſe ad productum ex B in D, ut A eſt ad B, nam prima harum rationum A D, B D nihil aliud eſt, quàm ratio A, B ducta in eandem magnitudinem, quę eſt D, quod ſupra in numeris explicatum eſt.

Eodem diſcurſu C B . B D :: C . D, ratio enim C B ad B D nihil aliud eſt, quàm ratio C ad D ducta in eandem magnitudinem B.

Oſtenſum igitur eſt, A D . B D :: A . B.

Oſtenſum quoque eſt, C B . B D :: C . D.

Habentur ergo quatuor rationes, quę neceſſariò ſunt æquales; nam prima oſtenditur æquari ſecundę, & tertia quartę; ſed ex ſuppoſitione ſecunda, & quarta ſunt æquales, conſtituunt enim proportionem A . B :: C . D. Igitur etiam prima A D, B D, & tertia C B, B D ſunt æquales, ideoque hę duę rationes novam efficiunt proportionem A D . B D :: C B . B D.

In hac ultima proportione duo conſequentes ſunt æquales, eſt enim eadem magnitudo B D. Ergo etiam duo antecedentes A D, C B, qui eandem habitudinem ad eandem magnitudinem B D habent, neceſſariò ſunt æquales, hoc eſt, A D = C B, vel B C; quod ſignificat, magnitudinem A ductam in D æquari B ductę in C, vel C ductę in B, idem enim eſt Productum igitur extremorum unius proportionis æquale ſemper eſt producto mediorum.

Admonitio.

Ut animos capiant Tyrones, illuſtrique exemplo cognoſcant quidnam hominis mens capere tandem poſſit, cùm ſedula, attentique cura ad ea, quibus vacat, incumbit, viſum eſt hic apponere neſcio quid, quod miraculi ſpeciem habet, cujuſque Malezrevius teſtis eſt. Sereniſſima Cenomanenſis Dux, cùm nondum ſexdecim eſſet annos nata, mirificè ſcientiarum, litterarumque ſtudus detinebatur. Quotidie ad duas horas Malezrevium audiebat, quem & advocabat altero quoque die Marlinum, cum ibi Regia Familia degeret. Inter hæc, ipſo ſtatim ſtudiorum initio, arithmeticam ſibi addiſcendam propoſuit, ſed

cum

cùm regulæ aureæ admiratione capta eſſet, ejuſque rationem perconctaretur, reſpondit Malezievius, conſectarium eſſe proprietatis ejus proportionis, quę geometrica ſolet appellari, cujus ſpecimen exhibuit, in quatuor, qui ſequuntur, numeris, 3. 4. 6. 8, aſſeruitque, quoties quatuor quicunque numeri habitudinem inter ſe habent, toties productum, quod fit ſub extremis, æquari producto, quod fit ſub mediis. Auxit hoc, non minuit illius deſiderium, quęſivit enim ejuſdem proprietatis rationem. Non laborandum tunc eſſe, reſpondit ille, ejus demonſtrationem a pluribus pendere, inferrique principiis, quæ nunquàm audiſſet, auditura tamen eſſet deinceps. Verùm magna eum inceſſit admiratio, cùm ſequenti die accepit litteras ab eadem exaratas, quibus ſe ut adiret hortabatur, ut ſimul perpenderent, futurum ne eſſet alicui uſui neſcio quid, quod nocte ſuper mira illa proprietate erat contemplata. Ut pervenit, mirum quantùm lætatus eſt, dum vidit, primis annis Illam attigiſſe, penitusque rimatam eſſe profunditatem omnem ſubtilitatemque demonſtrationis, tamque clarè explicuiſſe, ut nihil clarius ea de re uſpiam extaret. Illud ipſum ecce tibi, quod Malezievio expoſui.

Conſidero quatuor numeros, 2, 4, 3, 6, qui ſunt proportionales, quia primus eſt ſeſquiſſis ſecundi, & tertius quarti, quærendum mihi eſt, cur productum 2 in 6 æquetur producto 4 in 3.

Ideo ſtatim video, ſi multiplico 2 per 6, productum 12, quod eſt productum extremorum, duplum eſſe debere producti 2 in 3, cùm 6 ſit duplus 3.

Verùm ſi loco hujus producti 2 in 3, ſeu 3 in 2, quod eſt dimidium producti extremorum, capiam productum 3 in 4, neceſſe erit, hoc productum 3 in 4 duplum eſſe producti 3 in 2, cùm 4 duplus ſit 2, ſicuti 6 duplus eſt 3. Cùm ergo productum 3 in 4 duplum ſit producti 3 in 2, quod eſt dimidium producti extremorum, abſolutè productum hoc 3 in 4 æquabitur producto extremorum, hoc eſt, mediorum productum producto extremorum æquabitur.

Ut autem cognoſcatur, in hac mira Sereniſſimæ Ducis demonſtratione nihil deeſſe, ſed tàm convenire cum univerſali demonſtratione, quæ ſuperùs per literas tradita eſt, nominandi tantùm ſunt literis quatuor numeri, quos Illa elegerat, demonſtratioque peragenda hoc modo.

A. B. C. D.
2. 4. 3. 6.

2 du-

2 ductus in 6 est ad 2 ductum in 3, ut 6 est ad 3, seu

$$AD.AC :: DC$$

3 ductus in 4 est ad 3 ductum in 2, ut 4 est ad 2, seu

$$CB.CA :: BA$$

Atqui, ex hypothesi 4 est ad 2, ut 6 est ad 3, seu

$$BA :: DC$$

Ergo 2 ductus in 6 est ad 2 ductum in 3, ut 3 ductus in 4 est ad 3 ductum in 2, seu

$$AD.AC, \text{ vel } CA :: CB.CA.$$

Igitur 2 multiplicatus per 6 æquivalet 3 multiplicato per 4, seu

$$AD = BC$$

Ex qua propositione sequitur, si quatuor quicunque termini tales sint, ut extremorum productio æquetur productum mediorum, quatuor illos terminos esse proportionales; nam duo illa producta, puta AD, BC ad tertiam magnitudinem, ut BD, necessariò habebunt eandem habitudinem, & gradatim ascendendo per præcedentem demonstrationem, tandem reperietur A. B :: C. D.

Quod cum ita sit, data aliqua proportio toties ad libitum commiscere poterit, absque eo, quod destruatur, quoties datur æqualitas inter producta mediorum, & extremorum.

Sic si A. B :: C. D, sequetur etiam A. C :: B. D, duo enim producta eadem semper manent. Hanc permutationem placuit Geometris appellare *Alternando*. In numeris, si 2. 4 :: 3. 6, erit quoque 2. 3 :: 4. 6.

Similiter si consequentes tum in prima, quàm in secunda ratione suis antecedentibus addantur, ut summa conferatur cum suis consequentibus, hoc est, si A. B :: C. D, fiat A + B. B :: C + D. D, facile videre est, extremorum producto productum mediorum æquari. productum enim extremorum est AD + BD, mediorum verò BC + BD. sed AD + BD = BC + BD, nam AD per primam proportionem æquatur BC, & BD est idem ac BD. Hoc dicitur *Componendo*. In numeris, si 2. 4 :: 3. 6, erit quoque 2 + 4. 4 :: 3 + 6. 6, hoc est, 6. 4 :: 9. 6.

Quod si loco addendi consequentes suis antecedentibus, ut fiat comparatio cum consequentibus, auferantur ipsi consequentes a suis antecedentibus, hoc est, si A. B :: C. D, fiat A − B. B :: C − D. D, eadem ratione ostendetur extremorum productum æquale producto mediorum, ideoque proportio nullo modo erit alterata. Id vocatur *Dividendo*. In numeris, si 8. 4 :: 27. 12, erit

erit quoque 9 — 4 :: 27 — 12. 12, hoc est, 5 : 4 :: 15 : 12.

Istæ sunt essentiales, præcipuæque commutationes, quæ in proportione locum habent, nam propriè loquendo, non fit nova proportio, si, cùm habetur 2 . 4 :: 3 . 6, fiat 4 . 2 :: 6 . 3; hoc enim nihil aliud est, quam inversos terminos accipere, qui eundem inter se ordinem servent, ideòque non possunt ullam habere mutationem. Quod dicitur *Invertendo*.

Pariter si loco 3 . 2 :: 6 . 4, fiat 3 . 6 :: 2 . 4, non erit vera mutatio, cùm solùm mutetur locus duarum rationum æqualium, ut inter se comparentur. Dicitur hoc *Permutando*.

Superest nunc, ut de ratione composita pauca quædam dicantur.

Quotiescunque duarum rationum, quarum una puta A, B, alia C, D, non solùm duo antecedentes, sed etiam duo consequentes inter se ducuntur, hæc duo producta novam efficiunt rationem, ut A C, B D, hoc est, magnitudinem A ductam in C, comparatam magnitudini B ductæ in D. Hæc nova ratio dicitur ratio composita ex ratione A ad B, & ex ratione C ad D. Exemplum in numeris:

Prima ratio 2, 4
Secunda ratio 9, 15

2 ductus in 9 dat 18; 4 ductus in 15 dat 60; ratio 18 ad 60 dicitur ratio composita ex ratione 2 ad 4, & ex ratione 9 ad 15.

Si duæ rationes componentes sunt æquales, hoc est, si constituunt unam proportionem, ratio composita dicitur ratio duplicata primæ rationis. Ut 2 . 4 :: 6 . 12, ductis duobus antecedentibus inter se, provenit numerus 12, ductis verò duobus consequentibus inter se, fit 48, ratio 12 ad 48, quæ est ratio composita duarum rationum æqualium, dicitur ratio duplicata rationis 2 ad 4, seu 6 ad 12, quæ illi æqualis est.

Cavendum diligenter, ne ratio dupla cum ratione duplicata confundatur; cùm enim dicitur 4 est in ratione dupla 2, idem est ac si dicas, 4 est duplus ipsius 2; non autem est in ratione duplicata. Quæ omnes definitiones diligenter tenendæ sunt.

Sciendum in primis ulterius est, unam, eandemque rationem pluribus modis exprimi posse, ut

A, B
A D, B D
A D C, B D C

est semper eadem ratio A, B, nam ratio producti A D ad pro-

du-

ductum B D, nil aliud est, quàm ratio A, B in eandem magnitudinem D ducta. Similiter ratio A D C, B D C est ratio A, B ducta in idem productum, seu in eandem magnitudinem D C. In numeris

1, 2
2, 4
8, 16
32, 64
100, 200

eadem semper perseverat ratio, cùm antecedens semper sit semissis consequentis, vel, quod idem est, secunda ratio 2, 4 nihil aliud sit, quàm prima ratio 1, 2 ducta in eandem magnitudinem 2. Pariter ratio ultima 100, 200 eadem est, ac prima 1, 2 ducta in eandem magnitudinem 100.

Minimi termini, qui rationem exprimunt, seu simplicissimi termini rationis, dicuntur exponentes rationis. Ut supra in ratione litterali exponentes sunt litteræ A, B; in ratione verò numerica exponentes sunt numeri 1, 2; semperque erunt per quemcunque tandem numerum multiplicentur numeri 1, 2. Ratio enim 100000, 200000 semper habebit exponentes 1, 2; semperque erit ratio 1 ad 2.

Hinc colligitur, id quod multùm conferet ad ea, quæ deinceps dicturi sumus, rationem duplicatam rationis numeri ad numerum necessariò habere exponentes numeros quadratos.

Si enim detur ratio numeri ad numerum, ut 3, 6, & inveniendæ sit ratio duplicata, oportet, illi rationi aliam æqualem rationem apponere, ut 3. 6 :: 4. 8. Ductis deinde antecedentibus, sicut & consequentibus inter se, ut habeatur ratio duplicata, proveniet ratio 12, 48.

Hæc ratio 12, 48, si ad minimos terminos reducatur, qui sunt 1, 4, ac proinde ejus exponentes, clarum est, hos duos numeros 1, 4 esse numeros quadratos; quod & semper continget. Cujus ratio est.

Disponantur duæ rationes æquales in proportione 3. 6 :: 4. 8
Reducantur ad simplicissimos terminos 1. 2 :: 1. 2

In hac ultima proportione tam antecedentes, quàm consequentes sunt idem numerus. Si ergo inter se multiplicentur antecedentes, sicuti & consequentes, ut habeatur ratio duplicata, necessariò habebuntur duo numeri quadrati, uterque enim provenit ex multiplicatione ejusdem numeri per seipsum.

Ex

Ex quo pariter infertur, id quod incommenſurabilium fundamentum eſt, uti deinceps videbitur, nimirum, ſi detur ratio duplicata, cujus exponentes non ſint numeri quadrati, rationem, cujus illa duplicata eſt, non eſſe rationem numeri ad numerum.

Antequam conſiderationes hæ univerſales de proportionibus terminentur, conſiderandum nobis eſt, id, quod ſupra dictum eſt de æqualitate inter producta extremorum, & mediorum, fundamentum eſſe regulæ aureæ. Eò enim tendit hæc regula, ut datis tribus numeris, quartus proportionalis inveniatur. ut ſi datis 2. 4:: 6 .. quærendus ſit quartus numerus, qui proportionem terminet, hoc eſt, ad quem 6 eam rationem habeat, quæ eſt 2 ad 4, quartus hic numerus, quicunque tandem ſit, clarum eſt, quod ductus in primum, exhibiturus ſit productum æquale producto ex 4 in 6, nam primus numerus 2, & incognitus, qui quæritur, ſunt extrema proportionis Ergo 4, & 6 ſunt media. Ductis itaque inter ſe 4, 6, proveniet numerus 24: ſed clarum eſt, etiam 24 futurum eſſe productum 2 per incognitum. Si igitur dividatur 24 per 2, neceſſariò proveniet numerus incognitus 12, qui quærebatur, ideoque erit 2. 4:: 6. 12.

PROPOSITIO I FUNDAMENTALIS

pro lineis proportionalibus.

Lineæ æqualiter inclinatæ in duobus differentibus ſpaciis parallelis clauſis eam inter ſe habent rationem, quam perpendiculares illorum ſpaciorum. (Tab. 5. fig. 58.)

Supponantur duæ lineæ CD, GH, ſingulæ æqualiter in ſuo ſpacio inclinatæ, hoc eſt, angulus CDB æquetur angulo GHF. Oſtendere oportet, lineam CD eſſe ad lineam GH, ut perpendicularis AB eſt ad perpendicularem EF.

Dividatur linea CD in quot placuerit aliquotas, puta in ſex partes æquales, ut CK. Per diviſionum puncta agantur parallelæ ſpacio, hoc eſt lineæ AC. Dividentur hæ totum ſpacium in ſex ſpacia parva parallela æqualia inter ſe: ſimiliter perpendicularis BA diviſa erit ita, ut linea AI ſit ejus ſexta pars, uti CK eſt ſexta pars lineæ CD. Lineæ igitur CK, AI ſunt aliquotæ ſimiles linearum CD, AB. Porro linea AI dimetia-

rur perpendiculares E F, quæ in ea contineatur, puta ter cum residuo. Si per divisionum puncta ducantur parallelæ lineæ E G, linea G H ita divisa erit, ut linea G M ter cum residuo contineatur in linea G H; sicuti linea A I, vel illi æqualis E L ter cum residuo continetur in perpendiculari E F. imò per 5. lib 2. linea G M necessariò æquabitur lineæ C K. Ex quo patet, etiam C K sextam partem lineæ C D ter cum residuo contineri in linea G H, sicut & A I sexta pars lineæ A B ter cum residuo continetur in linea E F. Verùm etiam duo residua O H, N F sunt inter se, ut aliquotæ similes C K, A I, seu illis æquales G M, E L, quod ostenderur, si, diviso spacio E G L M parallelis clauso in aliquot æ liquotas, harum una metiatur spacium N O F H, quod continet duo residua. Lineæ igitur C K, A I aliquotæ similes antecedentium C D, A B æquè continentur in consequentibus G H, E F. Quare C D. G H. :: A B. E F. Quod erat ostendendum.

Quòd si linea C D potius, quam in sex æquales partes, divisa esset in centum mille æquales partes, adhiberi potuissent centum illę millesimæ partes ad mensurandam lineam G H, quarum una centumillesima pars contenta fuisset aliquoties in linea G H, vel præcisè, vel cum residuo; sicut & una centumillesima pars lineæ A B contenta fuisset pari numero in linea E F vel præcisè, vel cum residuo. Ex quo pariter haberetur proportio quatuor linearum, uti superiùs.

PROPOSITIO II.

Si duæ lineæ in suo spacio parallelo eo modo inclinentur, quo duæ aliæ in suo, quatuor hæ lineæ sunt proportionales. (fig. 59.)

Si linea A B æquè in suo spacio inclinetur, ac linea E F in suo, hę duę lineę erunt inter se, ut perpendiculares spaciorum per pręced propos. Similiter si duę lineę C D, G H æqualiter singulę in suo spacio sint inclinatę, ipsę quoque erunt inter se, ut perpendiculares suorum spaciorum. atqui duę rationes eidem rationi æquales sunt æquales inter se. Ratio igitur duarum primarum inclinatarum A B, E F æqualis est rationi duarum reliquarum C D, G H. Id quod fuit earum proportionem.

PRO-

PROPOSITIO III.

Si idem angulus duas habeat baſes parallelas, latera unius baſis erunt proportionalia lateribus alterius baſis; & ipſæ baſes erunt inter ſe, ut latera ad eandem partem, quæ latera homologa dicuntur. (fig. 60.)

Angulus DAE, ſeu BAC duas habeat baſes parallelas DE, BC. Oſtendere oportet, latus AB eſſe ad latus AD ſuum homologum, ut latus AC eſt ad latus AE ſuum homologum; item baſim BC eſſe ad baſim DE, ut latus AB ad latus AD, ſeu ut latus AC ad ſuum homologum AE.

Per verticem A agatur parallela duabus baſibus, efficiet hæc cum illis duo ſpacia parallela, quorum majus GAHFDE, & minus GAHBCI. Jam cùm baſes ſint parallelæ, linea AD, quæ illas ſecat, ſecabit eadem obliquitate. Angulus igitur, cujus vertex B, æquatur angulo, cujus vertex D ob eandem rationem. Angulus, cujus vertex C, æqualis eſt angulo, cujus vertex E. Cùm ergo lineæ AB, AC eodem modo inclinentur in parvo ſuo ſpacio, quo lineæ AD, AE in magno, per præced. propoſ. hæ quatuor lineæ AB, AD, AC, AE ſunt proportionales.

Ut oſtendatur (*fig.* 61.), etiam baſim BC eſſe ad baſim DE, ut eſt latus AC ad latus homologum AE, per puncta E, C ducantur lineæ RT, PO parallelæ lateri AD, formantur his duo nova ſpacia parallela, quorum majus continetur lineis TER, ABD, minus lineis OCP, ABD. Jam linea AC, cùm ſit æquè inclinata in parvo ſuo ſpacio, ac linea AE in magno, & linea BC in parvo ſuo ſpacio, ac linea DE in magno ob parallelifmum baſium, ſequitur per præced. baſim BC eſſe ad baſim DE, ut latus AC eſt ad latus AE.

Corollarium I.

Propoſitio hæc eſt fundamentum unius partis circini proportionalis, quæ vocatur *partium æqualium*. Hæc enim revera nil aliud eſt, quam duæ lineæ æquales diviſæ in 100, 200, &c. partes æquales, juxta operantis intentionem. Hæ duæ lineæ ſecun-

dum ſuas extremitates moventur circa idem centrum; ut quemlibet angulum efficere poſſint. Vide ejus ſchema. (*fig.* 62.)

Si dividenda proponatur data linea B C in decem æquales partes, aperiatur ita inſtrumentum ex duabus lineis in 100 v. g. æquales partes diviſis compoſitum, ut anguli, quem duæ illæ lineæ efficiunt, baſis ſit linea B C dividenda. Poſitis hinc, & inde circini communis extremitatibus in diviſionibus 10, 10, linea 10, 10 intercepta inter circini extremitates, erit decima pars lineæ B C. Nam omnis hæc operatio eò tendit, ut ejuſdem anguli duæ ſint baſes parallelæ; ideoque ſicut latus A 10 eſt decima pars lateris A 100, ſic baſis 10, 10 erit decima pars baſeos B C.

Corollarium II.

Eadem hæc propoſitio fundamentum eſt omnium operationum, quæ fiunt inſtrumento illo, quod vulgò (*fig.* 63.) Baculus Jacob appellatur. Conſtat inſtrumentum hoc duabus regulis ſingulis in æquas partes diviſis. Hæ duæ regulæ ad rectos ſe ſecantes ita diſponuntur, ut altitudo Baculi A B perpendiculariter poſita ſuper plano B C, quod menſurandum ſit, cum radio viſuali ab altitudine Baculi A, uſque ad diſtantiæ punctum C ducto, efficiat angulum duas habentem baſes parallelas, ſcilicet diſtantiam B C, & portionem D E regulæ tranſverſæ inſtrumenti. Hinc enim habetur diſtantia B C, cùm ſit A D ad A B, ut D E ad diſtantiam B C, quę ſupponitur v. g. latitudo cujuſdam fluminis, quæ ex ripæ puncto B menſuranda ſit.

PROPOSITIO IV.

Si duo anguli æquales habeant ſingulis ſuam baſim, & anguli ab iſdem baſibus, & lateribus factis ſingulis æquentur; hujuſmodi anguli dicuntur ſimiles, & latera unius ſunt proportionalia lateribus alterius. Idem de baſibus dicendum. (fig. 64.)

Eſto angulus, cujus vertex A, par angulo, cujus vertex D, & anguſus A B C factus ad baſim B C latere A B par angulo D E F facto ad baſim E F latere D E, conſequenter anguli A C B, D F E erunt pares, & in hoc caſu latus A B dicetur homologum reſpectu lateris D E, & latus A C homologum reſpe-

respectu lateris D F. Ostendendum est, latus A B esse ad latus D E, ut latus A C est ad latus D F; & ut basis B C est ad basim E F.

In primis clarè patet, hanc propositionem eandem esse cum præcedenti alter expositam. Nam si superimponatur vertex A vertici D, habebitur angulus duas habens bases parallelas, cum ex hypothesi angulus B æquetur angulo E. Ut tamen immediate res ostendatur, ducendæ tantum sunt per vertices A, D duæ parallelæ basibus. Jam lineæ A B, D E eodem modo erunt inclinatæ singulæ in suo spacio, quo lineæ A C, D F singulæ in suo. Igitur quatuor hæ lineæ sunt proportionales, hoc est, ita est latus A B ad latus D E, ut latus A C ad latus D F. Eodem pariter modo basium proportio ostendetur.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

Datis tribus lineis quartam proportionalem invenire. (Tab. 6. fig. 65.)

Lineæ datæ sint A B, C D, E F. Ad punctum A fiat vertex cujusvis anguli, cujus unum latus sit linea A B. Super puncto B ponatur punctum C lineæ C D, ita ut linea C D sit basis anguli, cujus vertex A. Eidem puncto A applicetur punctum E lineæ E F, ita ut linea E F congruat lineæ A B. Per puncta A, D ducatur linea indefinita, linea F H ducta primæ basi C D parallela, & terminata in puncto H a linea indefinita, erit quarta proportionalis quæsita. Patet enim, anguli A duas esse bases C D, F H parallelas, adeoque ita esse latus A B ad basim C D; ut est latus E F ad basim F H, quæ est quarta proportionalis quæsita.

PROPOSITIO VI.

Si duorum angulorum inter easdem parallelas existentium basibus, duæ novæ bases parallelæ ducantur, erunt hæ secundæ bases primis basibus proportionales. (fig. 66.)

Sint duorum angulorum B A C, E D F duæ bases B C, E F.

Du-

Ducatur parallela G K, exhibet hæc duas novas bases duobus angulis, scilicet G H, I K. Probandum est, basim G H esse ad basim B C, ut basis I K est ad basim E F. Hæc autem manifestum est; nam ratio G H ad B C æqualis est rationi A G ad A B, quæ æquatur rationi D I ad D E, quæ est eadem cum ratione I K ad E F. Quare prima ratio æquatur ultimæ, hoc est, G H, B C :: I K, E F.

PROPOSITIO VII.

Datis duobus circulis inæqualibus, si in minori accipiantur duæ chordæ, quæ singulæ subtendant eundem numerum graduum, quem subtendant duæ aliæ chordæ singulæ in majori, hæ quatuor chordæ erunt proportionales. (fig. 67.)

Disponendæ tantùm sunt chordæ minoris circuli, ut eundem capiant angulum, quem chordæ majoris. Si deinde jungantur bases, habebuntur anguli simules, quorum latera, quæ sunt chordæ, erunt per 4 hu lib. proportionalia. Nam cùm chorda A B tot subtendat gradus, quot chorda D E, anguli C, & F ad bases æquabuntur inter se, sunt enim duo anguli inscripti insistentes arcubus eosdem gradus continentibus. Eadem ratione angulus A angulo D æquabitur. Ergo etiam duo anguli ad vertices D E F, A B C erunt æquales. Quare latus A B est ad latus homologum D E, ut latus B C ad latus homologum E F.

Si duæ ex datis chordis sint diametri singulæ suî circuli, eadem semper erit demonstratio; semper enim erit diameter ad diametrum, ut chorda ad chordam, cùm eundem numerum graduum ex hypothesi subtendant.

Corollarium.

Hæc propositio est fundamentum illius partis circini proportionalis, quæ *chordarum* dicitur. Cujus usus ut intelligatur, explicanda est constructio hujus circini. (*Tab. 6 fig. 68. & Tab. 7 fig. 68.*)

Describatur circulus, qui dividatur in suos gradus; hic tamen divisus est usque ad 180. Habeantur deinde duæ regulæ mobiles circa centrum O, quod & centrum circini proportionalis supponitur. Supra quas hinc, & inde transferantur omnes chordæ circuli divisi, ratio ducto a centro O: ut longitu-

gitudo chordæ B 10, scilicet chordæ decem graduum transferatur ex O in 10, & longitudo chordæ A 20, hoc est chordæ viginti graduum ex O in 20, in utraque regula, & sic deinceps. Instrumenti ita dispositi usus facilis est.

Detur circulus, cujus diameter quæcunque, in quo invenendus sit arcus, puta 45 grad. Aperiantur in primis oportet duæ regulæ, quæ circinum componunt, ita ut radius E D attingat utrinque divisiones 60, 60. Deinde inventum intervallum inter 45, 45 transferendum est in circulum dividendum: hoc designabit arcum 45 grad. Nam in circino proportionali, quocunque tandem modo aperiatur, habetur angulus, cujus duplex est basis parallela, ac proinde linea O 60 est ad lineam O 45, ut basis 60, 60 est ad basim 45, 45, & *Alternando* linea O 60 ad lineam 60, 60, ut linea O 45 ad lineam 45, 45. Sed linea O 60 est radius circuli, cujus ope circinus proportionalis confectus est, chorda enim sexaginta grad. necessariò æquatur radio circuli, ut mox facilè ostendetur. Ergo cùm linea 60, 60, ex suppositione sumpta sit æqualis lineæ E D radio circuli dividendi, habetur in hac proportione radius ad radium, ut chorda 45 grad. primi circuli, ad chordam 45 grad. secundi circuli. Quare si hæc longitudo transferatur in circulum dividendum ex puncto E ad 45, habebitur arcus 45 graduum.

Porro omnino clarum est, (fig. 69) lineam E G chordam arcus 60 grad. æquari radio E D. Nam angulus E D G est angulus 60. grad., cùm ejus vertex sit D centrum circuli, quarum uterque duorum angulorum, quos illius latera ad basim efficiunt, 60 gradibus constat: nam v. g. angulus E G F, qui est angulus inscriptus, cum habeat mensuram semissem arcus E F 120 graduum, erit necessariò angulus 60 grad.; idem dicendum de angulo G E H. Ergo cùm illi tres anguli sunt æquales, æquales quoque erunt lineæ E G, G D, D E. Ergo, &c.

PROPOSITIO VIII.

Si linea dividens angulum quemvis in duas æquales partes cadat super basim ejusdem, dividet basim lateribus anguli proportionaliter, (fig. 70.)

Nimirum recta A C, quæ angulum A dividit bifariam, ita secabit

cabit baſim B D in C, ut latus A B ſit ad portionem baſis B C, ſicut latus A D eſt ad portionem D C.

Per puncta B, D ducantur lineæ E F, H I, parallelæ lineæ A C, productæ in G. Formantur duo ſpacia parallela, in quibus clarum eſt, lineam B A eodem modo inclinari in ſuo ſpacio, quo lineam D A in ſuo; cùm ex hypoth. angulus B A C æquetur angulo D A C: Item lineam B C æquè inclinatam eſſe in primo ſpacio, a quo continetur linea B A, ac lineam C D in ſecundo ſpacio, a quo terminatur linea A D; eſt enim eadem linea parallelis ſecta. Ergo per 2 hu lib. linea A B eſt ad lineam A D, ut linea B C ad lineam C D, & *Alternando* linea A B ad lineam B C, ut linea A D ad lineam D G.

PROPOSITIO IX.

Si a vertice anguli recti demittatur perpendicularis ad baſim, efficit hæc duos angulos toti, & inter ſe ſimiles; Hinc que plures proportiones deducuntur. (fig. 71.)

Attentè relegenda eſt propoſitio 4. hu. lib., ut probè hæc, quæ magni momenti eſt, intelligatur.

Tam angulus B A D, quàm angulus B C A rectus eſt; ſed primus efficit ſupra baſim B D angulum A B D; ſecundus pariter efficit ad baſim B A eundem angulum A B D, ſeu A B C. Ergo angulus B A D ſimilis eſt angulo B C A, cùm anguli ad baſim ſint æquales inter ſe; ſicuti & anguli B A D, B C A, qui ex hypot. recti ſunt. Eodem prorſus modo angulus B A D oſtenditur ſimilis angulo D C A; nam, præterquam quòd ambo recti ſunt, efficiunt ſinguli ſuis lateribus ad baſes angulos æquales; primus enim B A D ad baſim B D efficit angulum B D A, quem eundem B D A, ſeu C D A pariter efficit ad baſim A D ſecundus angulus D C A. Tres ergo anguli B A D, B C A, D C A non ſolum æquales ſunt, ſed etiam ſimiles; id quod confundendum minimè eſt, ſcilicet angulos, quos eorum latera cum baſibus efficiunt, ſingulis ſingulos æquales eſſe. Quare per 4 hu. lib latera homologa horum trium angulorum ſimilium ſunt proportionalia, ſcilicet

Minus latus B C eſt ad ſuam baſim A B, ut minus latus A D ad ſuam baſim B D.

Latus

Latus C D eſt ad ſuam baſim A D, ut latus A D ad ſuam baſim B D.

Minus latus B C anguli B C A eſt ad reliquum ſuum latus A C, ut minus latus A C anguli A C D ad reliquum ſuum C D.

Ut breviùs hæ proportiones oſtendantur, dici poteſt, per perpendiculatem A C tres haberi medias proportionales, nimirum

A B mediam eſſe proportionalem inter B C, & B D.

A D mediam eſſe proportionalem inter D C, & D B.

A C mediam eſſe proportionalem inter B C, & C D.

PROPOSITIO X.

D*Atis duabus lineis mediam proportionalem invenire.* (fig. 72.)

Datæ rectæ A B, C D, quibus media proportionalis quærenda eſt, ita ad unum punctum diſponantur, ut eandem rectam A D efficiant. Ex puncto unionis B erigatur perpendicularis indefinita, diviſaque linea A D bifariam in P, puncto F ut centro, intervallo F D, vel F A, deſcribatur circulus, qui ſecet perpendicularem in aliquo puncto, ut E. erit B E media proportionalis quæſita. Nam ductis lineis E A, E D, ex conſtructione angulus A E D rectus eſt, ejus enim vertex E eſt in circumferentia, inſiſtitque dimidiæ peripheriæ, ſcilicet 180 gradibus. Quare per præced. propoſit. perpendicularis E B media eſt proportionalis inter baſis ſegmenta A B, & B D, ſeu C D, quæ ſunt duæ lineæ datæ.

LIBER SEPTIMUS.

De Reciprocis.

Definitiones.

QUotieſcunque quatuor lineæ ſunt proportionales, extremæ reſpectu mediarum reciprocæ dicuntur

Ergo cùm dicitur v. g. hæ duæ lineæ ſunt reciprocæ illis duabus, idem eſt, ac ſi dicatur, Prima ex his eſt ad primam ex illis, uti ſecunda ex illis ad ſecundam ex his.

Quotieſcunque ejuſdem anguli duæ ſunt baſes, quæ, licèt non ſint parallelæ, hinc, & inde tamen ſuis lateribus efficiunt angulos æquales, hujuſmodi baſes dicuntur Antiparallelæ. Hę autem baſes tripliciter poſſunt eſſe antiparallelæ, juxta triplicem diſpoſitionem.

Angulus C A E (*fig* 73.) in prima diſpoſitione duas habet baſes C D, E B, quæ decuſſatim ſecantur, in qua caſu angulus C debet æquari angulo E, & conſequenter angulus B angulo D.

Angulus I F K (*fig* 74.) in ſecunda diſpoſitione duas pariter habet baſes I K, G H, quæ omnino ſunt ſegregatæ, & in hoc caſu angulus I debet æquari angulo G H F, & conſequenter angulus K angulo H G F.

Angulus N L O (*fig* 75.) in tertia diſpoſitione duas tandem habet baſes N O, M O in puncto O unitas, & in hoc caſu angulus L N O debet æquari angulo L O M, & conſequenter angulus L M O angulo L O N.

In hiſce tribus diſpoſitionibus latera totalia lateribus partialibus comparata efficiunt terminos reciprocos.

In prima enim diſpoſitione latus A C (*fig* 73.) eſt ad latus A D, ut latus A E ad latus A B.

In ſecunda latus F I (*fig* 74.) eſt ad latus F H, ut latus F K ad latus F G.

In tertia latus L N (*fig* 75.) eſt ad latus L O, ut latus L O ad latus L M.

Quod ut oſtendatur per tres vertices A, F, L (*Tab.* 8. *fig* 76, 77.

27, 78) ducantur parallelæ ſingulis baſibus; quælibet trium diſpoſitionum duo exhibet ſpacia parallela.

In prima diſpoſitione lineæ A C, A D ſunt in ſpacio comprehenſo parallelis R S, T V; lineæ verò A E, A B ſunt in alio ſpacio parallelis P Q, X Y clauſo: atqui ex hypoth. linea A C æquè inclinatur in primo ſpacio, ac linea A E in ſecundo; & linea A D æquè in primo, ac linea A B in ſecundo. Ergo per 1 propoſ. proportional. lib. 6. linea A C eſt ad lineam A E, ut linea A D eſt ad lineam A B.

In ſecunda diſpoſitione lineæ F I, F K ſunt in ſpacio parallelis Z & 5, 6 contento; ſimiliter lineæ F H, F G in alio ſpacio parallelis 1, 2, 3, 4 terminato: ſed linea F I eadem modo inclinata eſt in primo ſpacio, quo linea F H in ſecundo; & linea F K eodem modo inclinata eſt in primo, quo linea F G in ſecundo. Ergo linea F I eſt ad lineam F H, ut linea F K eſt ad lineam F G.

In tertia diſpoſitione lineæ L N, L O ſunt in ſpacio parallelo 13, 14; 7, 8, item lineæ L O, L M ſunt in ſpacio parallelo 11, 12, 9, 10. Ergo linea L O in utroque ſpacio parallelo reperitur; efficitque cum baſibus angulos diſſimiles: atqui linea L N eo modo inclinata eſt in primo ſpacio, quo linea L O in ſecundo, ubi efficit angulum acutum O parem acuto N, & ex alia parte linea eadem L O facit in primo ſpacio angulum L O N æqualem illi angulo, quem efficit linea L M in ſecundo, ſcilicet angulo L M O. Ergo linea L N eſt ad lineam L O, ut linea L O eſt ad lineam L M.

PROPOSITIO I. UNIVERSALIS

Pro Reciprocis.

SI producta indefinitè diameter alicujus circuli ſecetur aliqua perpendiculari, ſive hæc circulum ſecet, ſive tangat, ſive extra circulum cadat, & ab extremitate diametri oppoſitæ extremitati productæ ducantur duæ quæcunque lineæ vel peripheriæ, vel perpendiculari terminatæ, & ab alterutra ſectæ; erunt quævis totæ, & ejus pars, quæ a puncto, ex quo ductæ ſunt, ſumenda eſt, reciprocæ alteri toti, & ejus parti. (fig. 79. 80. 81. 82.)

Primus caſus, cùm perpendicularis circulum ſecat. Sit Diameter (*fig* 79) A F ſecta a perpendiculari B C. Ex puncto A ducantur utcunque lineæ A B, A C terminatæ in punctis B, C a perpendiculari, & ſectæ in punctis E, D a peripheria. Probandum eſt, lineam A B eſſe ad lineam A C, ut portio A D eſt ad portionem A E. Quod ut demonſtretur, junctis punctis E, D linea D E, oſtendere ſolùm oportet, baſes B C, E D eſſe antiparallelas. Hoc autem facile eſt, nam, ducta H A tangente parallela B C, anguli A D E inſcripti menſura eſt ſemiſſis arcus E G A: ſed etiam anguli A B C menſura eſt ſemiſſis ejuſdem arcus E G A, cùm ſit angulus alternus angulo H A E minoris ſegmenti, cujus menſura eſt ſemiſſis arcus E G A. Ergo baſes ſunt antiparallelæ.

In hoc primo caſu, licèt baſes ſe ſecent decuſſatim, (*fig* 80) eadem tamen ſemper erit demonſtratio. Angulus enim E C A inſcriptus æquatur angulo D B A ob eandem rationem. Quare linea A B ſemper erit ad lineam A C, ut portio A D ad portionem A E.

Secundus caſus, cùm perpendicularis circulum tangit. Si ducantur duæ lineæ A B, A D (*fig* 81) terminatæ in punctis B, D a perpendiculari, erunt hæ ſectæ reciprocè in punctis E, F a peripheria, hoc eſt, erit tota A B ad totam A D, ut portio A F ad portionem A E. Junctis punctis E, F linea F E, ſolùm demonſtrandum eſt, baſes B D, F E eſſe antiparallelas. Hoc autem patet, ſupra enim oſtenſum eſt, anguli C B A alterni reſpectu anguli minoris ſegmenti eandem eſſe menſuram, ſcilicet ſemiſſem arcus E G A, quæ eſt anguli inſcripti E F A. Ergo &c.

In hoc ſecundo caſu diameter eſt media proportionalis inter quamvis totam, & ejus partem in circulo. Nam ducta linea E C, demonſtrandum tantùm eſt, lineas B C, E C baſes anguli B A C, quæ uniuntur in puncto contactus C, eſſe antiparallelas juxta tertiam diſpoſitionem. Hoc autem clarum eſt; nam anguli E C A inſcripti menſura eſt eadem, quæ anguli A B C alterni reſpectu anguli minoris ſegmenti, ſcilicet ſemiſſis arcus E G A. angulus verò A E C rectus eſt, inſiſtit enim dimidiæ circumferentiæ, ac proinde æquatur angulo A C B, qui a diametro, & a tangente fit. Quare linea A E eſt ad diametrum A C, ut diameter A C ad illius portionem A E. Quod & de quavis alia linea, & de ejus portione in circulo dicendum eſt.

Tertius caſus, cùm perpendicularis diametrum productam extra

tra circulum ſecat. In hoc caſu ductæ lineæ (*fig.* 82.) A E, A C terminentur in punctis E, C a perpendiculari, ſecentur autem in punctis B, D a peripheria. Oſtendi debet, totam A E eſſe ad totam A C, ut portio A D eſt ad portionem A B. Id verò oſtenditur, ducta B D, demonſtrando, baſes E C, B D eſſe antiparallelas. Porro hoc patet evidenter, anguli enim B D A inſcripti menſura eſt eadem ac anguli C E A alterni reſpectu anguli H A B minoris ſegmenti, quæ eſt dimidius arcus B G A. Ergo &c.

PROPOSITIO II.

Si duo anguli ad verticem oppoſiti habuerint baſes antiparallelas, habebuntur lineæ reciprocè, uti videre eſt in figura. (fig. 83.)

Habeant ex hypot duo anguli B A C, D A E ad verticem A oppoſiti baſes B C, D E ita diſpoſitas, ut angulus, cujus vertex B, æquetur angulo, cujus vertex D; & conſequenter angulus, cujus vertex C, angulo, cujus vertex E. In hac diſpoſitione, præterquam quod facilè videre eſt, angulos æquales ad eandem eſſe partem, quod non foret, ſi baſes eſſent parallelæ, anguli enim, qui tum æquarentur, eſſent alterni, ſequitur etiam, lineam A C eſſe ad lineam A B, ut linea A E eſt ad lineam A D; ita ut tota D C ſecta ſit reciprocè in A reſpectu ad totam B E ſectam in A, hoc eſt, portiones A C, A D eſſe extremos terminos illius proportionis, cujus medii ſunt portiones A B, A E.

Quod ut oſtendatur, ductis per verticem A lineis I F, G H parallelis ad baſes, fient duo ſpacia parallela, patet autem ex hypot lineam A C eo modo inclinari in ſuo ſpacio, quo lineam A E in ſuo, ob æquahtatem angulorum A E D, A C B, item ob eandem rationem lineam A B æquè eſſe inclinatam in primo ſuo ſpacio, ac lineam A D in ſuo ſecundo. Quare linea A C eſt ad lineam A E, ut linea A B ad lineam A D.

Corollarium.

Si duæ chordæ ſe ſecuerint in circulo; ſe ſecabunt reciprocè. (Tab. 9. fig. 84.)

Sic

Sint duæ chordæ A B, C D, quæ in circulo se secent in puncto E, erit A E ad E D, ut C E ad E B.

Hoc autem clarè patet: nam ductæ baſes A D, C B ſunt antiparallelæ; angulorum enim B C D, B A D eidem arcui B F D inſiſtentium eadem eſt menſura, ſcilicet ſemiſſis illius arcus.

Hinc nova habetur demonſtratio ad inveniendam mediam proportionalem inter duas datas lineas. Si enim jungantur duarum illarum linearum extremitates, ita ut efficiant unam lineam rectam, quæ fiat diameter alicujus circuli, & ex puncto unionis erigatur perpendicularis, erit hæc perpendicularis peripheria terminata ſemiſſis chordæ ſectæ reciprocè portionibus diametri, ac proinde media proportionalis. erit enim ſecta in duas æquales partes.

PROPOSITIO III.

Si ex puncto extra circulum accepto ducantur ad concavam peripheriam duæ lineæ, erunt ſingula totæ, & partes extra circulum reciprocæ inter ſe. (fig. 85.)

Nimirum oſtendendum eſt, lineam A D eſſe lineam A E, ut pars A C eſt ad partem A B. Ad hoc autem oſtendendum ſufficit demonſtrare, baſes D E, B C eſſe antiparallelas

Hoc verò facile eſt; menſura enim anguli E D B eſt ſemiſſis arcus B C G E: atqui per 3 hb 5 menſura anguli B C A eſt ſemiſſis arcus B F C plus ſemiſſe arcus C G E, quæ eſt eadem cum illa. Ergo, &c

PROPOSITIO IV.

Si duarum linearum ab eodem puncto ductarum altera circuli tangens ſit, altera ſecans, erit illa media proportionalis inter totam ſecantem, & ejus partem extra circulum. (fig. 86.)

Scilicet oſtendere eſt, lineas B C, B D, baſes anguli B A D eſſe antiparallelas juxta tertiam diſpoſitionem

Angulus C D B inſcriptus eſt, quare menſuram habet dimidium arcum B E C ſed angulus C B A, cùm ſit angulus ſegmenti, eandem habet menſuram. Ergo, &c. Eodem diſcurſu angulus D B A oſtendetur æqualis angulo B C A.

Co-

Corollarium

PROBLEMA

Cognoscere longitudinem diametri Terræ sine observatione Astronomica. (fig. 87.)

Supponatur, punctum A verticem esse alicujus montis supra litus maris D positi: Cognoscatur linea A D, quæ exhibet elevationem verticis montis supra maris planitiem. Ex puncto A versus mare collimetur, donec visio extendi potest, ita ut radius visualis A B evadat tangens in puncto B. Habeatur mechanicè distantia A B. Tandem disposita proportione secundum hanc propositionem, nimirum ut est altitudo montis cognita A D ad tangentem cognitam A B, ita tangens eadem A B ad lineam A C; ab eaque ablata A D altitudine montis, habebitur residuum lineæ D C diameter Terræ quæsita.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

Datam rectam, ut A B, extrema, & media ratione in puncto C dividere, hoc est, ut tota A B sit ad portionem C B, ut eadem portio C B ad reliquam portionem C A. (fig. 88.)

Ex puncto A extremitate datæ rectæ erigatur perpendicularis A D æqualis semissi datæ lineæ A B. Puncto D tanquam centro, intervallo D A, describatur circulus A E F. Tandem ducta B D secante circulum in E, transferatur linea B E ex B in C. Punctum C secabit datam rectam extrema, & media ratione.

Brevitatis causa linea A B appelletur . . . . . M
Linea B E . . . . . N
Consequenter, & B C æqualis ipsi B E erit . N
Linea F E diameter circuli dupla lineæ A D, ac proinde æqualis ipsi A B erit . . . . . M
Ergo linea A C, quæ nihil aliud est, quam linea A B minus linea C B, erit secundum characteres . . . . . M—N

Oppor-

Oportet oſtendere M — N. N :: N. M. Ex conſtructione linea B F eſt M + N. Atqui per præced propoſ linea B E eſt ad lineam A B, ut linea A B ad lineam B F, hoc eſt in litteris

N. M :: M. M + N.

Invertendo. M. N :: M + N. M

Dividendo. M — N. N :: M + N — M. M.

Sed M + N — M nihil aliud eſt, quàm N. Ergo M + N. N :: N. M. Hoc eſt, linea A C eſt ad lineam C B, ut linea C B ad lineam A B. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Dato uno latere anguli iſoſceles, qui futurus ſit 36 grad. ejus baſim invenire. (fig. 89.)

Eſto latus datum A D. Ex puncto A intervallo A D deſcribatur arcus D E F. Per probl. præced. linea A D dividatur extrema, & media ratione in C. Major portio A C transferatur ex D in B ſupra arcum D F. Erit linea D B baſis quæſita, hoc eſt, ducto altero latere A B, angulus D A B erit 36 grad. Quod ut oſtendatur, ſatis eſt demonſtrare, eum angulum eſſe quintam partem duorum rectorum, ſeu 180 graduum. Ducatur linea B C.

Cum angulus D A B ſit Iſoſceles, & conſequenter anguli ad baſim B D æquentur inter ſe, duo tantùm ſunt demonſtranda. 1. angulum D A B æquari angulo D B C. 2. angulum hunc D B C eſſe dimidium anguli D B A ad baſim. Hinc enim ſequetur, angulum D A B eſſe ſemiſſem ſingulorum angulorum æqualium, qui ſunt ad baſim, &, cùm hi tres anguli æquivaleant duobus rectis, ipſum inſuper quintam eſſe partem duorum rectorum.

Prima pars. Primæ partis ratio clara eſt, quotieſcunque angulus A D B duas habeat baſes antiparallelas, lineas B C, B A: atqui hæ lineæ revera ſunt baſes antiparallelæ; ex conſtructione enim linea A B, ſeu A D eſt ad lineam A C, ſeu B D ei æqualem, ut linea B D ad lineam D C, quod eſt tertia diſpoſitio antiparallelarum. Ergo angulus acutus D A B æquatur acuto D B C.

Secunda pars. Ex conſtructione linea C D eſt ad lineam B D, ſeu A C, ut linea A C ad lineam A B. Ergo per 8. lib 6. angulus

gulus D B A diviſus eſt biſariam linea B C. Igitur angulus C B D eſt ſemiſſis anguli A B D. Quare angulus B A D eſt quinta pars duorum rectorum, ideoque angulus 36 graduum.

LIBER OCTAVUS.

De Figuris.

CUm hucuſque examinatæ ſint proprietates linearum, & angulorum, doctrinæ ordo exigit, ut deinceps de Figuris agatur.

Definitiones.

Figura eſt ſpacium lineis terminatum.

Si ſpacium lineis rectis claudatur, Rectilineum dicitur; ſi una, aut pluribus curvis, Curvilineum; ſi curva, & recta, Mixtum. In præſentiarum de figuris rectilineis agetur.

In Figuris rectilineis tria præcipuè conſiderantur, Anguli, Latera, & Area.

Figuris rectilineis ſimplicioribus quædam indita ſunt nomina, quæ ignorare minimè decet.

Figura	3 laterum	dicitur	Triangulum.
	4 laterum		Quadrilaterum.
	5 laterum		Pentagonum.
	6 laterum		Hexagonum
	7 laterum		Heptagonum.
	8 laterum		Octogonum.
	9 laterum		Enneagonum.
	10 laterum		Decagonum
	11 laterum		Endecagonum
	12 laterum		Dodecagonum.
	1000 laterum		Kiliogonum
	10000 laterum		Myriogonum.
	plurium laterum		
	indefinitè		Polygonum.

Triangulum in plures ſpecies dividitur, ſcilicet in Rectangulum, quod unum habet angulum rectum

Amblygonium, quod unum habet angulum obtuſum.
Oxygonium, quod tres habet angulos acutos
Æquilaterum, quod tria latera, & tres angulos habet æquales.
Scalenum, quod tria latera habet inæqualia.
Iſoſceles, quod duo latera habet æqualia

Quadrilaterum pariter varias habet ſpecies, nempe

Quadratum, quod & quatuor angulos rectos, & quatuor habet latera æqualia.
Rectangulum, quod habet quatuor angulos rectos; hinc omne quadratum eſt rectangulum
Parallelogrammum, quod habet latera oppoſita parallela.
Trapezium, quod habet quatuor latera inæqualia.
Rhombus, qui habet quidem quatuor latera æqualia; non autem angulos rectos.

Figuræ ſunt vel regulares, vel irregulares. Regulares ſunt, quarum omnia latera, & omnes anguli ſunt æquales. Irregulares e contra.

Cum figuræ habent quidem latera æqualia, non autem angulos æquales, æquilateræ ſimpliciter dicuntur

Quotieſcunque comparantur ſimul duæ figuræ, quæ habeant ſingulos angulos ſingulis æquales, & latera, quæ ſibi mutuò correſpondent, homologa; dicuntur figuræ ſimiles; & ſi non minus anguli, quàm latera, quæ mutuò comparantur, ſint æqualia, dicuntur figuræ totæ æquales, nec niſi poſitione differunt.

SECTIO I.

De Angulis, & Lateribus Figurarum.

PROPOSITIO I.

QUævis Figura rectilinea in tot reſolvi poteſt triangula, quot habet latera. (fig. 90.)

Quod ut probetur, ſolùm eligendum eſt aliquod punctum A in area, hoc eſt in ſpacio lateribus comprehenſo, ab eoque ducendæ lineæ ad ſingulos angulos. Hinc enim patet, quòd tot fient triangula, quot latera habet figura.

PRO-

PROPOSITIO II.

OMnes anguli cujuſvis polygoni æquivalent bis tot angulis rectis, demptis quatuor, quot ſunt latera polygoni. (fig. 90.)

Sumpto enim in polygono puncto quovis A, illoque in triangula diviſo, tres anguli cujuſvis trianguli, ut trianguli C A B, æquivalent duobus rectis per 5 lib 4 Triangulum enim non differt ab angulo, qui ſimul cum baſi conſideratur, ideoque quidquid de angulo cum ſua baſi conſiderato demonſtratum eſt, idipſum de triangulo intelligi debet Ergo omnes anguli triangulorum, quæ polygonum componunt, bis tot rectis æquivalent, quot latera illud habet Quare ſi ab illis demantur omnes anguli, qui ſunt ad verticem A, qui per 2 lib 4 ſimul ſumpti æquivalent quatuor rectis, reſtabit ſumma reliquotum angulorum, qui fiunt lateribus polygoni ad baſes. Ergo &c.

PROPOSITIO III.

IN duabus quibuſcunque figuris ſimilibus Perimeter, ſeu circuitus unius eſt ad perimetrum alterius, ut latus unius eſt ad latus homologum alterius. (fig. 91.)

Sit figura A B C D E ſimilis figuræ F G H I K. Quoniam hæ figuræ ſimiles ſunt, hoc eſt, habent angulos ſingulos ſingulis æquales, ſequitur ob rationem triangulorum ſimilium, in quę reſolvi poſſunt hæ duæ figuræ, latus A B eſſe ad latus F G, ut latus B C eſt ad latus G H, & ut latus C D ad latus H I, & ut latus D E ad latus I K, & ut latus E A ad latus K F Ergo *Componendo* ſequitur, omnia unius latera ſimul ſumpta eſſe ad omnia latera alterius ſimul ſumpta, ut eſt latus A B ad ſuum latus homologum P G.

PROPOSITIO IV.

QUævis figura regularis circulo inſcribi, & circumſcribi poteſt. (fig. 92.)

Nam v. g. Hexagonum A C E G I L poteſt inſcribi circulo; clarum enim eſt, deſcribi poſſe circulum, qui tranſeat per tria puncta A, C, E per 2 lib. 3., qui circulus habebit centrum aliquod punctum, ut N, tranſibitque neceſſario per reliquos polygoni angulos, cùm ex ſuppoſitione omnia latera ſint æqualia, & conſequenter debeant eſſe chordæ ejuſdem circuli æquales, & a centro æquidiſtantes.

Idem patitur Polygonum poteſt circulo circumſcribi. Ex centro enim N duci poſſunt perpendiculares ad ſingula ejus latera, ut N F ad E G. Quibus perpendicularibus exiſtentibus æqualibus (menſurant enim diſtantiam laterum, ſeu chordarum æqualium a centro N) poterit centro N deſcribi circulus, qui tranſeat per perpendicularium extremitates, & habeat tangentes latera, ſeu chordas alterius circuli.

PROPOSITIO V.

Linea N F dicitur radius rectus figuræ, linea verò N E ſimpliciter appellatur radius figuræ. Manifeſtum eſt autem in omnibus figuris regularibus inter ſe collatis, ita eſſe radium rectum ad radium rectum, ut eſt radius ad radium, & ut latus ad latus, & ut perimeter ad perimetrum. (fig. 92.)

Nam jam duæ figuræ regulares ſimiles ponuntur, ideoque per 3 hu lib. perimeter eſt ad perimetrum, ut latus ad latus. Quæ proportio pariter haberi debet, cum radius rectus radio recto, & radius radio comparatur, ſunt enim ſemper triangula ſimilia: triangulum namque E N F ſimile eſt triangulo O N P, ideoque omnia latera ſunt proportionalia. Ergo N E. N O :: N F. N P.

Corollarium.

Circumferentiæ ſunt inter ſe, ut ipſarum radii. Poſſunt enim conſiderari peripheriæ, tanquam polygona regularia infinitis conſtantia lateribus, quare per hanc propoſ. perimeter eſt ad perimetrum, hoc eſt, circumferentia ad circumferentiam, ut radius ad radium.

Corollarium hoc unà cum propoſit. 6 lib. 3. eſt præcipuum Staticæ fundamentum.

Expli-

Explicatur. Supponatur Bilanx A B C, (*fig.* 93.) cujus punctum fixum B, lancea æqualia B A, B C, quæ ſuſtineant duo pondera A, C æqualia, puta unius libræ, clarum eſt, illa in perfecto eſſe æquilibrio; nam ad hoc, ut v. g. momento temporis pondus C aſcendat in L, neceſſe erit, ut pondus A deſcendat in M, & quo tempore pondus C unius libræ deſcribat arcum C L, pondus A unius libræ eodem tempore deſcribat arcum A M: atqui hi duo arcus ſunt æquales tum ob æqualitatem angulorum A B M, C B L ad verticem oppoſitorum, tum ob æqualitatem radiorum A B, C B. Ergo hinc, & inde habebitur æqualitas motus, idem enim pondus eodem tempore eandem viam decurrit. Quare, cùm pondus A tantum virium habeat, ut deſcendat, quantum reſiſtentiæ pondus C, ut aſcendat, neceſſariò in æquilibrio conſiſtere debent, quod experientia quotidiana confirmat.

Verùm ſi idem pondus A unius libræ non amplius in puncto A ſuſpendatur, ſed in puncto F, quod æquè diſtet a punctis A, B, non minus evidens eſt, ſolvi ſtatim æquilibrium, cùm enim radius F B non ſit, niſi ſemiſſis radii B C, arcus F G D non niſi ſemiſſis arcus C H E erit, licèt uterque eundem graduum contineat numerum, ſed ſicut major circumferentia dupla eſt minoris (radius enim unus eſt duplus radii alterius), ſia pondus C unius libræ duplo majorem viam efficiet deſcendendo ad punctum E, quam efficiat corpus F aſcendendo ad punctum D; atqui ſi duorum corporum pondere æqualium unum duplo majorem eodem tempore viam decurrit, quàm aliud, neceſſe eſt, ut illud, quod duplam viam decurrit, duplum quoque motum habeat. Ergo pondus C duplum motum habebit ejus, quem habebit pondus F. Ergo vis illius, ut deſcendat, erit duplo major reſiſtentia hujus. Quare revera deſcendet, & tollet æquilibrium.

Quod ſi puncto C, loco ponderis unius libræ, appendatur pondus ſemiſſis libræ, pondus F unius libræ, erit in æquilibrio cum pondere C ſemiſſis libræ, utrinque enim dabitur motus æqualitas.

Nam clarè intelligitur, ſi duorum corporum pondere æqualium unum eodem tempore percurrat viam duplo majorem, quam aliud, duplo quoque majorem illud motum habere debere. Ad hoc enim, ut idem eodem tempore duplo velocius moveatur, duplo majorem vim debet habere. Pari ratione ſi corpus

dupli-

dimidiæ libræ eodem tempore efficiat viam duplam ejus, quam corpus unius libræ decurrit, oportet, habeatur hinc, & inde æqualitas motus: nam si corpus semissis libræ fuisset unius libræ, & duplam viam decurrisset, colligitur facilè, quòd duplo majorem motum habuisset. Cum ergo non sit nisi dimidiæ libræ, & tamen duplam viam pertranseat, necesse est, habeat eundem motum, quem habet corpus unius libræ, quod non nisi dimidiam viam decurrit. atqui arcus C H E duplus est arcus F G D, radius enim unius duplus est radii alterius. Ergo si pondus E non est nisi semissis ponderis D, habebitur æqualitas motus, ac proinde dabitur æquilibrium.

Hinc colligitur hæc propositio, quæ fundamentalis est in Mechanicis. Duo pondera sunt in æquilibrio, quotiescunque sunt in ratione reciproca distantiarum a puncto fixo; hoc est, cùm pondus F est ad pondus C, ut distantia B C ad distantiam B F.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Determinare angulum ad centrum, angulum figuræ, & angulum, quem radius efficit supra latus polygoni cujuscunque. (Tab. 10. fig. 94.)

Ut habeatur angulus ad centrum, hoc est angulus B D C, dividenda solum est peripheria per numerum laterum polygoni, ut hìc per 6.

Ut habeatur angulus polygoni, hoc est angulus A B C duobus polygoni lateribus contentus, ex 180 gradibus subducendus tantùm est arcus, quem unum latus subtendit; nam angulus cujus polygoni, ut A B C est inscriptus, cujus mensura est semissis arcus, cui insistit, ut hìc anguli A B C mensura est arcus A G E, hoc est semissis peripheriæ minus arcu A F B, quem latus A B subtendit.

Ut habeatur angulus A B D, quem radius D B super latus A B efficit, sumenda duntaxat est semissis anguli polygoni A B C.

PRO-

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

Circulo inſcribere, & circumſcribere figuras regulares. (fig. 94.)

Inſcribere Hexagonum. Chorda, quæ Hexagoni format latus, eſt radius ipſius circuli; junctis enim duobus radiis B D, C D linea B C illis æquali, haberur triangulum æquilaterum, quod conſequenter habet tres æquales angulos, quorum ſinguli neceſſariò erunt 60 grad., qui ſunt ſexta pars peripheriæ. Ergo habetur latus Hexagoni.

Inſcribere Triangulum. Duo latera Hexagoni B A, B C jungat chorda A C, arcus A B C erit 120 grad, hoc eſt tertia pars circumferentiæ. Ergo habetur latus Trianguli.

Inſcribere Dodecagonum. Diviſa chorda C H latere hexagoni in duas æquales partes per lineam D I, arcus C I H per 3 lib 3 diviſus pariter erit in duas æquales partes in puncto I, & conſequenter recta C I ſubtendet 30 gradus, hoc eſt duodecimam partem circumferentiæ. Ergo habetur latus dodecagoni. Ut hujuſmodi operationes facilè ſolvantur, faris eſt, arcum datum vel duplicare, vel bifariam dividere; hinc enim quamplurima polygona regularia habebuntrur.

Inſcribere Decagonum. Dividatur radius extrema, & media ratione, majus ſegmentum per 6 lib 7 erit chorda 36 grad ſed 36 gradus ſunt decima pars circumferentiæ. Ergo habetur latus Decagoni.

Inſcribere Pentagonum. Duplicetur arcus Decagoni, habebitur arcus 72 grad, hoc eſt quinta pars circumferentiæ. Ergo habetur latus Pentagoni.

Inſcribere Quindecagonum, ſeu Figura 15 larerum. Ex arcu 60 grad auferatur arcus 36 grad, reſiduus arcus 24 grad. eſt decima quinta pars peripheriæ. Ergo haberur latus Quindecagoni.

Circumſcribere figuras inſcriptas. Satis eſt per verticem cujuſque anguli polygoni, ut per puncta A, B, C tangentes ducere, quæ ſimul concurrant, efficient hæ figuram circumſcriptam dato circulo.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

IN omni triangulo angulus major majori latere ſubtenditur, & contra majus latus majorem angulum ſubtendit.

Quod ut oſtendatur, ſatis eſt deſcribere circulum, qui tranſeat per tria puncta, quæ tres angulos efficiunt, tunc enim tres anguli erunt inſcripti, & tria latera erunt chordæ, cætera hinc manifeſta ſunt.

Hic juvat repetere, quidquid præced. libro dictum eſt de angulo cum baſi, convenire etiam triangulo, cùm ſit idem, puta triangula ſimilia habere latera homologa proportionalia, &c.

PROPOSITIO IX.

IN omni triangulo ita eſt ſinus anguli ad latus, quod illi angulo opponitur, ut ſinus alterius anguli ad latus, quod illi opponitur. (fig. 95.)

Eſto triangulum BCD. Per tria puncta B, C, D, quæ formant vertices angulorum, deſcribatur circulus. Ex centro A ad vertices angulorum ducantur tres lineæ AB, AC, AD. Et ab eodem centro ducantur perpendiculares AE, AF, AG ad tria trianguli latera, hæ perpendiculares cùm tranſeant per centrum, ſecabunt bifariam ſingula latera, quæ ſunt chordæ in punctis H, I, K per 1. lib. 3. Jam quilibet angulus trianguli, cùm ſit inſcriptus, menſuram habet ſemiſſem arcus, cui inſiſtit. Ergo angulus inſcriptus BDC æquatur angulo BAF ad centrum, item angulus BCD angulo BAE, & angulus CBD angulo CAG. atqui per definit. ſinuum linea BI eſt ſinus anguli BAF, cum ſit ſemiſſis chordæ BC, quæ ſubtendit arcum duplum illius, qui eum dimetitur, & ob eandem rationem CK eſt ſinus anguli CAG, & BH ſinus anguli BAE. Ergo BI ſinus anguli BAF erit quoque ſinus anguli BDC illi æqualis, idem de reliquis trianguli angulis dicendum erit. Ex quo manifeſtè ſequitur, BI ſinum anguli BDC eſſe ad latus BC illi angulo oppoſitum, ut CK ſinus anguli CBD eſt ad latus CD illi oppoſitum, cùm uterque ſinus ſit ſemiſſis lateris, idem dicendum de reliquo angulo BCD, cujus ſinus BH eſt ſemiſſis lateris BD.

Dili-

Diligenter obſervandum eſt, licèt triangulum inſcriptum B C D (*fig.* 96) unum habeat angulum obtuſum, ut C B D, nihilominus lineam C K eſſe ejus ſinum, ea enim eſt ſemiſſis chordæ C D, quæ ſubtendit arcum C L D duplum illius, qui obtuſi C B D menſura eſt. Verùm, præcisè loquendo, angulus obtuſus nullum habet ſinum, cùm non poſſit perpendicularis demitti ab uno ejus latere ad aliud, quin per verticem producatur. Unde in tali caſu pro ſinu anguli obtuſi C B D ſumitur ſinus complementi D B M, (*fig.* 96) hoc eſt ſinus anguli acuti D B M, qui ſimul cum obtuſo duos rectos facit. Manifeſtum autem eſt, D M perpendicularem ad latus C B productum in M ex definitione ſinuum, eſſe ſinum anguli D B M; atqui in circulo angulus D L C acutus eſt complementum obtuſi C B D, ſimul cum ſumpti æquivalent dimidiæ peripheriæ. Quare pro ſinu anguli C B D ſumendus eſt ſinus anguli D L C: ſed C K eſt ſinus anguli D L C, qui eſt æqualis angulo C A G. Ergo C K eſt ſinus obtuſi C B D. reliqua oſtenduntur ut in prima demonſtratione.

PROPOSITIO X

SI Pentagoni circulo inſcripti duo proxima latera jungat chorda, quæ ſecetur ab alia chorda conjungente alterutrum eorum laterum cum proximo latere, duæ illæ chordæ ita ſe ſecabunt, ut majus ſegmentum Pentagoni lateri æquetur. (fig. 97.)

Duo latera C A, A B jungantur chorda C B, & duo latera A B, E B chorda A E; hæ duæ chordæ ita ſecantur in F, ut C F, vel E F æquetur lateri pentagoni.

Angulus A E B eſt angulus 36 grad., cùm inſiſtat arcui A B 72 grad.; Angulus verò C B E eſt angulus 72 grad., cùm inſiſtat duobus arcubus C D, D E ſingulis 72 grad. Ergo & angulus B F E eſt 72 grad., cùm tres anguli trianguli B E F debeant æquari 180 gradibus. Ergo triangulum B E F eſt iſoſceles. Ergo F E æquatur B E lateri pentagoni. Idem oſtendetur de C F.

SECTIO II.

De menſura Areæ figurarum Rectilinearum.

PROPOSITIO XI.

AReа rectanguli habetur, ſi unum ejus latus in aliud ducatur. (fig 98.)

Eſto Rectangulum ABCD, cujus baſis, ſeu longitudo CD, & altitudo AC. Ut hujus figuræ area, ſeu capacitas habeatur, ejus tantùm formatio conſideranda eſt. Manifeſtum autem eſt, ſi linea CD parallela ſibi percurrat longitudinem lineæ CA, donec conveniat cum linea AB, eam deſcripturam, vel potius cooperturam eſſe ſuperficiem rectanguli. Ergo baſis CD totties in altitudine CA continetur, quot puncta ſunt in linea CA. Ergo ſi ducatur linea CD in lineam CA, hoc eſt baſis in altitudinem, habebitur area rectanguli.

In numeris, ſi linea CD, ſeu AB ſit 11 perticarum, & linea CA, ſeu BD 2, ducto numero 11 in 2, productum 22 perticarum erit area rectanguli.

PROPOSITIO XII.

OMne Parallelogrammum æquatur Rectangulo eandem baſim, & altitudinem habenti. (fig. 99.)

Sit Parallelogrammum ABCD habens baſim CD, ejus verò altitudinem menſuret FD perpendicularis ad baſim. Fiat deinde rectangulum CDEF, quod eandem baſim CD, & altitudinem DF, ſeu CE habeat, erit hoc illi æquale.

Nam perpendicularis DF cùm ſit æqualis perpendiculari CE, & obliqua DB obliquæ CA ex conſtructione, diſtantia perpendiculi BF æquabitur diſtantiæ perpendiculi AE. Ergo triangulum BDF eſt æquale triangulo ACE. Si ergo ex una parte auferatur triangulum BDF, & ex alia addatur triangulum ACE, habebitur rectangulum CDFE parallelogrammo ABCD æquale, cùm rectangulum nihil aliud ſit, quàm trapezium ACDF unitum triangulo ACE, & parallelogrammum ſit idem trapezium

zium A C D F unitum triangulo B D F, quod eſt æquale triangulo A C E.

Ut in harum cognitionum veritate aſſuefiat animus, conſiderentur rectangulum, & parallelogrammum alia ratione poſita.

Sit parallelogrammum G H I K, (*fig.* 100) cujus baſis G H, ut autem ejus altitudo habeatur, erigenda eſt ex baſi G H perpendicularis H L terminata latere K I producto. Fiat deinde rectangulum G H L M eandem cum illo & baſim G H, & altitudinem H L habens; erit hoc illi æquale.

Triangulum enim G M I æquatur omnino triangulo H L K ob æqualitatem perpendicularium G M, H L, & obliquarum G I, H K, & diſtantiarum perpendiculi M I, L K.

Atqui ut habeatur rectangulum M L G H, ex triangulo M G I auferendum eſt triangulum L N I, eique addendum triangulum G N H.

Ut habeatur autem parallelogrammum G H K I, a triangulo H L K æquali triangulo G M I auferendum eſt triangulum L N I, eidemque addendum triangulum G N H. Ergo parallelogrammum æquatur rectangulo.

Eadem hæc propoſitio brevius oſtendi poſſet, uti præcedens. Nam ſi linea G H, quæ eſt baſis rectanguli, & parallelogrammi, producatur indefinitè verſus N, & movere concipiatur linea G N parallela ſibi ſuper longitudinem perpendicularis H L, portio G H toties in rectangulo continebitur, quot ſunt puncta perpendicularis H L. & eadem portio G H, aut illi æqualis, ut P Q, toties continebitur in parallelogrammo, quot puncta erunt in eadem perpendiculari. Quo enim tempore baſis producta G N pervenit ad punctum O, & latera rectanguli ſecant portionem O S, eodem latera parallelogrammi ſecant portionem P Q portioni O S æqualem; O S enim æquatur ipſi G H, & G H ipſi P Q ob parallelas. Ergo ſuperficies G H L M impletur, & formatur totidem lineis ſingulis æqualibus lineæ G H, quot ſuperficies G H K I. Quare hinc, & inde habetur æqualis ſumma æqualium linearum, perpendicularis enim H L determinat hanc ſummam, ut habeatur in utraque parte perfecta æqualitas. Ergo parallelogrammum æquatur rectangulo.

Hujuſmodi demonſtrandi methodus Geometria Indiviſibilium appellatur, cujus admirabilis fecunditas eſt, nonnullaque rurſus exempla exhibebuntur.

PROPOSITIO XIII.

OMne Parallelogrammum dividi poteſt in duo triangula, quæ ſint omnino æqualia: Hinc ſequitur, omne triangulum ſemiſſem eſſe alicujus parallelogrammi. (fig. 101.)

Demonſtratio per ſe patet. Ducta enim ad angulos oppoſitos linea, quæ Diagonalis dicitur, tria latera utriuſque trianguli neceſſariò ſunt æqualia. Ergo, &c.

Corollarium I.

Trianguli Area eſt ſemiſſis areæ parallelogrammi, & conſequenter rectanguli eandem cum illo baſim, & altitudinem habentis.

Corollarium II.

Triangula vertices inter eaſdem parallelas, & baſim communem habentia, neceſſariò ſunt æqualia, vel triangula eandem baſim, & altitudinem habentia ſunt æqualia. (*fig* 102)

Triangulum enim CAB eſt ſemiſſis rectanguli, cujus baſis BC, altitudo verò perpendicularis illa, quæ parallelarum diſtantiam metitur: ſed etiam triangulum CDB eſt ſemiſſis ejuſdem rectanguli. Ergo duorum triangulorum area eſt æqualis. Idem quoque per indiviſibilia facilè poſſet oſtendi.

PROPOSITIO XIV.

IN omni triangulo rectangulo quadratum lateris maximi, quod hypotenuſa appellatur, æquatur ſimul quadratis duorum reliquorum laterum.

Hæc eſt mirabilis illa propoſitio, cujus inventio Pythagoræ attribuitur, cujuſque uſus propemodum eſt infinitus. (fig. 103.)

Detur triangulum rectangulum BAC, quadratum BCDE æquale eſt duobus ſimul reliquis quadratis ABFK, ACGL.

Ex vertice A anguli recti deinuttatur AH parallela lateri BE, & ab eodem puncto ducantur ad extremitates lateris DE li-

neæ

neæ AD, AE. Rurſus ab extremitatibus lateris CB agantur lineæ CF, BG lateribus BF, CG terminatæ.

Linea AH dividit maximum quadratum in duo rectangula IBEH, ICDH. Oſtendere oportet, rectangulum IBEH quadrato ABFK, & rectangulum ICDH quadrato ACGL æquari.

Ad hoc conſiderentur duo triangula FBC, ABE. Triangulum FBC eſt ſemiſſis quadrati BFKA, cùm habeat eandem cum illo & baſim, & altitudinem, nam triangulum FBC conſiderari poteſt, ut terminatum parallelis FB, KC, habens verticem in C, baſim BF, & altitudinem AB; hæc enim eſt perpendicularis, quæ parallelarum diſtantiam menſurat. Ob eandem rationem triangulum ABE eſt ſemiſſis rectanguli IBEH, nam BE eſt baſis, BI verò altitudo utriuſque, trianguli ſcilicet, & rectanguli. Ergo ſi hæc duo triangula FBC, ABE ſunt æqualia, eorum quoque dupla erunt æqualia: atqui hæc duo triangula ſunt revera æqualia, nam latera CB, BF trianguli FBC æquantur lateribus EB, BA trianguli ABE, cùm ſint quadratorum latera; inſuper angulus CBF lateribus CB, BF comprehenſus æquatur angulo EBA lateribus EB, BA contento, uterque enim horum angulorum componitur angulo recto, & angulo communi CBA. Ergo baſis CF æquatur baſi AE per 9 lib 4. Ergo duo triangula FBC, ABE ſunt omnino æqualia. Ergo eorum dupla, hoc eſt quadratum BFKA, & rectangulum IBEH ſunt æqualia.

Eodem ratiocinio oſtendetur, duo triangula CAD, CGB æquari inter ſe, & conſequenter eorum dupla, hoc eſt, quadrarum CALG, & rectangulum ICDH. Ergo quadratum BCDE compoſitum his duobus rectangulis æquale eſt duobus ſimul quadratis AKFB, CALG. Quod erat oſtendendum.

Facilè probari poteſt, miram hanc propoſitionem, non niſi corollarium linearum proportionalium eſſe, quæ ſequentem propoſitionem univerſaliorem reddunt.

PROPOSITIO XV.

SI linea quævis, ut AB, dividatur in duas partes in puncto C, & duæ aliæ lineæ, ut EF, GH, mediæ ſint proportionales, una quidem EF inter totam AB, & ejus

minorem partem A C, alia verò G H inter totam A B, & ejus majorem partem C B; quadratum totius A B æquabitur quadratis duarum mediarum proportionalium E F, G H. (fig. 104.)

Memoria repetatur oportet, jam oſtenſum eſſe, ſi qua lineæ ſit media proportionalis inter duas alias, quadratum mediæ æquari rectangulo, quod fit ſub extremis; hæc eſt proprietas proportionis geometricæ, quæ quibuſcumque magnitudinibus ſive numeri ſint, ſive lineæ, &c convenit.

Appelletur linea .	A B . .	x
Segmentum minus . .	A C . .	y
Segmentum majus .	C B .	z
Media proportionalis.	E F . .	R
Reliqua	G H .	P

Quoniam linea R eſt media proportionalis inter x, & y, ſequitur per proprietatem proportionis, $R R = x y$.

Item quia P eſt media proportionalis inter x, & z, ſequitur per eandem proprietatem, $P P = x z$ Ergo $R R + P P = x y + x z$

Sed $x y + x z$ nihil aliud eſt, quàm x ductum in $y + z$, hoc eſt, tota linea in ſua ſegmenta, ſeu in ſeipſam ducta, nimirum $x x$.

Ergo $R R + P P = x x$. Hoc eſt, quadratum lineæ A B æquatur quadratis duarum proportionalium E F, G H.

Corollarium I.

Quadratum Hypotenuſæ æquatur duobus quadratis reliquorum laterum. Nam per 9 lib 6 (*Tab* 11 *fig* 105) latus A B eſt medium proportionale inter B C, & B D, & latus A D eſt medium proportionale inter D C, & D B.

Hinc colligitur, omne triangulum, cujus baſeos quadratum æquale eſt duobus quadratis reliquorum laterum, eſſe triangulum rectangulum; nam ſi latera abs ſe recederent, ut eſſet angulus obtuſus, baſis major fieret, ſi verò ad ſe accederent, ut fieret angulus acutus, baſis minor evaderet, & conſequenter ejus quadratum majus, vel minus foret, quàm ſi angulus foret rectus.

Corollarium II.

Latera Decagoni, Pentagoni, & Hexagoni eodem circulo in-

inſcripta poſſunt in triangulum rectangulum diſponi (*fig.* 106.)

Nimirum oſtendendum eſt, quadrarum lateris pentagoni æquari quadratis laterum hexagoni, & decagoni.

Eſto in circulo latus pentagoni A B. Ex centro C ducantur radii C A, C B, qui per 7. hu lib. erunt latera hexagoni. Arcus ab illis interceptus dividatur bifariam in D, lineæ, ſeu chordæ A D, B D erunt latera decagoni. Arcus A D lateri decagoni ſubtenſus ſecetur in duas æquales partes in E radio C E, hic ſecabit latus pentagoni in I, & efficiet cum latere decagoni angulum rectum. Ducatur tandem linea I D.

Quotieſcunque oſtendi poteſt, latus hexagoni C B medium eſſe proportionale inter latus pentagoni A B, & ejus portionem B I; & latus decagoni A D eſſe medium proportionale inter A B, & ejus portionem A I, oſtenſum pariter erit per hanc 15 propoſ., quadratum lateris A B æquari quadratis linearum B C, & A D.

Id autem difficile non eſt. Conſiderentur duo triangula A C B, C I B, quæ iſoſcelia ſimilia eſſe, facilè deprehenditur. Nam in triangulo A C B ex hypoth. iſoſceli angulus A C B eſt 72 grad. eſt enim ex conſtruct. quinta circuli pars. Ergo reliqui duo ad baſim anguli A, & B ſinguli ſunt 54 grad.: debent enim ſimul cum illo & æquari 180 gradibus, & æquari inter ſe ob laterum C A, C B æqualitatem. Pariter triangulum C I B iſoſceles eſt, nam angulus C B I eſt 54 grad., eſt enim idem cum angulo C B A. Item angulus I C B eſt 54 grad., ejus enim menſura eſt arcus E D F B, qui conſtat arcu D F B 36 grad., cùm ſubtendatur lateri decagoni, & arcu D E, qui ex hypoth. eſt ſemiſſis arcus D A 36 grad., hoc eſt 18. Quare in triangulo C I B duo anguli ad baſim C B æquivalent ſinguli 54 gradibus, ideoque angulus C I B ad verticem erit 72 grad. Ergo C I B eſt triangulum iſoſceles. Ergo duo triangula iſoſcelia A C B, C I B ſunt ſimilia. Ergo eorum latera homologa ſunt proportionalia. Ergo A B baſis primi eſt ad B C baſim ſecundi, ut B C latus primi ad B I latus ſecundi. Ergo linea C B eſt media proportionalis inter A B, & B I.

Oſtendendum nunc eſt, lineam A D eſſe mediam proportionalem inter A B, & A I. Conſiderentur duo triangula A D B, A I D, quæ pariter iſoſcelia ſimilia eſſe, facilè oſtenditur.

In triangulo iſoſceli A D B ſinguli ad baſim A B anguli ſunt 18 grad., eorum enim menſura eſt ſemiſſis arcus D F B, vel

D A E

D A E 36 grad Ergo angulus A D B ad verticem erit 144 graduum.

In triangulo A I D idem oſtenditur: in primis enim eſt iſoſceles, hoc eſt, latus A I æquatur lateri I D, cùm perpendicularis manifeſtè dividat triangulum A I D in duo triangula rectangula omnino æqualia. Deinde angulus ad baſim I A D, qui eſt idem cum angulo B A D menſuram ſemiſſem arcus D F B habet; ideoque eſt 18 grad. Ergo etiam reliquus ad baſim angulus I D A erit 18 grad. Ergo angulus ad verticem A I D 144 grad. erit. Ergo duo triangula A D B, A I D ſunt iſoſcelia ſimilia. Ergo A B baſis primi eſt ad A D baſim ſecundi, ut A D latus primi ad A I latus ſecundi. Ergo linea A D eſt media proportionalis inter A B, & A I.

Igitur quadratum lineæ A B eſt æquale quadratis lineæ B C, & lineæ A D.

Quare ſi lineæ A D, B C diſponantur ad angulum rectum, linea A B erit baſis. Quod erat oſtendendum.

Hinc nova habetur conſtructio inſcribendi latus pentagoni pro ea, quæ ſequitur, propoſitione.

PROPOSITIO XVI.

PROBLEMA.

Dato circulo pentagoni latus inſcribere. (fig. 107.)

Ductis duabus diametris ad rectos in centro C ſe ſecantibus, dividatur radius B C bifariam in D. Ducatur A D, ex qua ſumatur D E par ipſi D C, item F C par lineæ reſiduæ A E. Ducta linea F B per F, E erit latus pentagoni.

Propoſitio non oſtenditur. Tyronibus, ut animos, atque jucunditatem capiant, locum inveniendi ejus demonſtrationem placet relinquere, quæ ex præcedenti colligitur.

PROPOSITIO XVII.

Quadratum baſeos cujuſvis anguli obtuſi excedit duo quadrata reliquorum laterum bis rectangulo, quod ſit ſub latere, in quod ſi producatur, perpendicularis ab extremita-

mitate alterius lateris demissa cadit, & sub parte lateris producti a perpendiculari, & vertice obtusi anguli intercepta. (fig. 108.)

Esto angulus obtusus A B C. Ex puncto A demittatur perpendicularis A D ad latus C B protractum in D. Quadratum baseos A C erit æquale quadrato lateris A B, & quadrato lateris B C plus duplici rectangulo sub latere C B, & linea D B

Appelletur basis	A C . . .	x
Latus	A B . . .	y
Latus	C B . . .	z
Linea	B D . . .	u
Ergo linea D C erit		z + u

Cùm triangulum A D B sit rectangulum, quadratum lineæ A B æquatur quadratis linearum A D, B D. Ergo quadratum lineæ A D est æquale quadrato lineæ A B minus quadrato lineæ B D, hoc est quadratum lineæ A D = y y − u u.

Item cùm triangulum A D C sit rectangulum, si quadrato lineæ A D, quod est y y − u u addatur quadratum lineæ D C, hoc est quadratum ex z + u, quod est z z + 2 z u + u u, habebitur z z + 2 z u + u u + y y − u u, hoc est z z + 2 z u + y y = x x

Scilicet quadratum lineæ A C æquatur quadrato lineæ A B, quadrato lineæ B C, plus duobus rectangulis z in u, hoc est lineæ B C in lineam D B.

Quod autem quadratum z + u sit z z + 2 z u + u u, clarum hoc omnino est, cùm tantùm debeat duci z + u in z + u, juxta id, quod supra dictum est in tractatu de Arithmetica per literas.

PROPOSITIO XVIII.

Quadratum baseos cujusvis anguli acuti deficit a duobus quadratis reliquorum laterum bis rectangulo, quod continetur sub eò latere, ad quod demittitur ab angulo opposito perpendicularis, & sub parte inter perpendicularem, & verticem dati anguli contenta. (fig. 109.)

Esto angulus B A C acutus, cujus basis B C. Ab extremitate B demittatur perpendicularis B D ad latus A C, quadratum basis B C æquatur duobus quadratis reliquorum laterum B A, C A

minus duplici rectangulo ſub latere CA, & parte AD.

Appelletur baſis . . .	BC . . .	x
Latus	AC . . .	y
Latus	AB . . .	z
Portio	AD . . .	u
Ergo portio DC erit		y—u

Cùm triangulum B D A ſit rectangulum, quadratum lineæ BD æquatur quadrato lineæ A B minus quadrato lineæ A D, hoc eſt quadratum lineæ D B=zz—uu.

Item cùm triangulum BDC ſit rectangulum, ſi quadrato lineæ BD addatur quadratum lineæ DC, habebitur quadratum lineæ BC.

Cùm ergo quadratum lineæ DB ſit zz—uu, ſi huic addatur quadratum lineæ DC, quod eſt yy—2yu+uu (nam DC eſt y—u, & cùm y—u ducitur in y—u, habetur yy—2yu+uu) habebitur yy—2yu+uu+zz—uu atqui+uu—uu æquivalet zero. Ergo pro quadrato lateris BC reſtat zz+yy—2yu, hoc eſt quadratum lateris AB plus quadrato lateris AC minus duplici rectangulo ſub latere AC, & parte AD.

PROPOSITIO XIX.

Invenire aream trianguli dati, cujus tria tantùm latera cognoſcantur. (fig. 110.)

Problema hoc eò tendit, ut habeatur perpendicularis trianguli dati, multiplicando enim baſim per perpendicularem, habetur duplum areæ trianguli per coroll. prop 13. hu lib. Enquo pacto perpendicularis cognoſci poſſit.

Sit triangulum datum CBD, ſupponatur latus CB 8 perticarum, baſis CD 23, & latus BD 16, cognoſcenda ſit perpendicularis BE, hoc eſt, quot illas perticas contineat.

Ex puncto B tanquam centro, intervallo B C latere minimo, deſcribatur circulus, qui occurrat baſi in punctis C, F. Jam oſtenſum eſt, perpendicularem B E, quæ per centrum B tranſit, ſecare bifariam debere rectam CF, quæ chorda hìc eſt. Hinc itaque primò quæri debet, quot perticarum ſit linea CF, hoc autem cognoſcetur, poſtquam cognitum erit, quot perticas contineat linea FD. Porro id faciſe haberi poteſt, nam per 3. 17. ut linea CD eſt ad lineam AD, ita linea GD ad lineam FD.

Quare

Quare cùm tres primæ lineæ ſint cognitæ, nam CD baſis eſt 23 perticarum, AD verò ſumma reliquorum laterum 24, cùm CB æquetur ipſi AB, & tandem DG eſt differentia laterum, hoc eſt 8; nam radius BG æqualis eſt lateri CB, inſtituenda tantùm eſt regula aurea, ſcilicet ut numerus 23 eſt ad 24, ita 8 ad quartum terminum, qui erit linea DF, multiplicato igitur 24 per 8, & producto 192 diviſo per 23, provenient 8 perticæ, & circiter $\frac{1}{3}$ pro linea DF, qua ſubducta ex CD 23 perticarum, reſtabit linea CF 14 $\frac{1}{3}$ perticarum, & diviſa CF bifariam in E, erit CE 7 $\frac{1}{3}$ perticarum.

Cùm itaque habeatur linea CE, facilè haberi poteſt etiam linea BE: cùm enim triangulum CBE ſit rectangulum, ſi ex quadrato lineæ CB, quod eſt 64 perticarum, auferatur quadratum lineæ CE, quod eſt paullo minus quàm quadr. 54. perticarum, reſtabunt circiter 10 perticæ pro quadrato perpendicularis BE, cujus radix quadrata ſunt 3 $\frac{1}{3}$ perticæ, & aliquid amplius.

Quare inventum tandem erit, quot perticis conſtabit perpendicularis. Si itaque ducatur baſis CD 23 perticarum in perpendicularem BE 3 $\frac{1}{3}$ perticarum, habebitur productum circiter 77 perticarum duplum areæ trianguli dati, quæ proinde erit 38 $\frac{1}{2}$ perticæ.

Propoſitio hæc magnum uſum habet: quare diligenter notandum eſt, ut habeatur perpendicularis alicujus trianguli, inſtituendam eſſe regulam auream hoc modo, ſcilicet ut baſis trianguli ad ſummam laterum reliquorum; ita differentia eorundem laterum ad quartam lineam, quæ ablata ex baſi relinquit aliam lineam, in cujus punctum medium cadit perpendicularis quæſita.

PROPOSITIO XX.

Si ſinguli trianguli anguli bifariam dividantur lineis ſupra latera oppoſita cadentibus, tres lineæ dividentes ſibi in eodem puncto in triangulo occurrent. (fig. 111.)

Trianguli ABC angulus A dividatur bifariam linea AD, & angulus C linea CE ſecante lineam AD in F. oſtendi debet, ſi ab angulo B per F ducatur linea BG, hanc dividere in duas æquales partes angulum B.

Quoniam ex hypoth. anguli A, & C ſunt diviſi bifariam, ſe-

quitur per 8. lib 6. A B esse ad B D, ut A C ad C D; & ob eandem rationem in triangulo A C D, A G esse ad C D, ut A F ad F D. Ergo A B est B D, ut A F ad F D. Ergo ob eandem propos. in triangulo A B D angulus B divisus est bifariam linea B F, cùm basis A D sit secta in F proportionaliter lateribus A B, B D.

PROPOSITIO XXI.

Si a tribus trianguli oxygonii angulis demittantur perpendiculares ad latera opposita, singulæ se in eodem puncto intra trianguli aream intersecabunt. (fig. 112.)

Ab angulis B, C trianguli oxygonii A B C demissæ sint perpendiculares B E, C D se intersecantes in G, si a vertice A ducatur per punctum G linea A F, hæc erit perpendicularis lateri B C.

Triangula B E A, C D A sunt similia, cùm anguli D, E sint recti, & angulus A communis. Ergo angulus A B E æquatur angulo A C D. Item triangulum G D B est simile triangulis C D A, B E A, angulus enim D rectus est, & angulus G B D communis. Ergo C D. D B :: A D. D G.

Considerentur deinde duæ lineæ C D, D B, tanquam latera continentia angulum rectum trianguli C D B, necnon lineæ A D, D G, tanquam latera comprehendentia angulum rectum trianguli A D G. quia duæ primæ continentes angulum rectum sunt proportionales duabus secundis rectum angulum comprehendentibus, sequitur, duo triangula C D B, G D A esse similia, & consequenter angulum D C B æquari angulo G A D. atqui si producatur A G usque in F, ut fiat triangulum A F B, erit hoc necessariò simile triangulo C D B, cùm angulus C B D sit communis, & angulus G A D æquetur angulo D C B. Quare cùm angulus C D B sit rectus, rectus quoque erit angulus A F B, & consequenter linea A F erit perpendicularis.

PROPOSITIO XXII.

Si aliqua linea, ut AB, secetur utcumque in C, quadratum totius AB æquale erit quadratis partium AC, CB plus bis rectangulo sub partibus AC, CB contento. (fig. 113.)

Sit

Sit tota linea . . AB . . . x
Portio , ... AC . . . y
Portio , ... CB . . . z
Ergo x æquabitur . . . . . y + z

Ducendo y + z in y + z, proveniet yy + 2yz + zz, hoc eſt quadratum lineæ AC plus quadrato lineæ CB plus duplici rectangulo ſub AC, CB æquale quadrato totius AB.

Quòd ſi linea AB (*fig.* 113) dividatur utcumque in tres partes in punctis C, D, quadratum totius AB æquabitur tribus quadratis partium AC, CD, DB plus bis rectangulo ſub AC, & CD, plus bis rectangulo ſub AC, & DB, plus bis rectangulo ſub CD, & DB. Quod ut oſtendatur, ſatis eſt denominare per litteras ſingulas totius partes.

Sit AC x
CD . . . . . y
DB . . . . . z
Ergo tota AB erit x + y + z

Si autem x + y + z ducatur in x + y + z, habebitur productum xx + yy + zz + 2xy + 2xz + 2yz æquale quadrato totius.

Si verò linea AB (*fig.* 113.) diviſa ſit in quatuor partes in punctis C, D, E, eodem modo oſtendetur, quadratum totius AB æquari quadratis quatuor partium AC, CD, DE, EB, plus bis rectangulo ſub AC, & CD plus bis rectangulo ſub AC, & DE, plus bis rectangulo ſub AC, & EB, plus bis rectangulo ſub CD, & DE, plus bis rectangulo ſub CD, & EB, plus bis rectangulo ſub DE, & EB, & ſic in infinitum.

Cujuſnam uſus ſit Arithmetica per litteras, ex hujuſmodi exemplis innoteſcere poteſt.

PROPOSITIO XXIII.

Omnis figura regularis eſt æqualis rectangulo, cujus baſis eſt ſemiſis perimetri, & altitudo radius rectus figuræ. (fig. 114.)

Sit figura regularis BFEGHD, cujus radius rectus AC. ſitque rectangulum IKLM, cujus baſis LM æquetur ſemiſſi perimetri figuræ, & altitudo KM radio recto AC: Area hujus rectanguli æquabitur areæ figuræ.

Ex

Ex centro figuræ A ducantur lineæ ad omnes angulos, ita ut resolvatur in tot triangula, quot latera habet: hìc hexagonum divisum est in sex triangula singula æqualia triangulo B A D. Jam area trianguli B A D æquatur rectangulo sub BC semisse lateris B D, & sub A C, hoc est rectangulo sub semisse lateris polygoni, & sub radio recto, ut hìc rectangulo IO. Ergo sex triangula simul sumpta, & componentia totum hexagonum, æquantur sex rectangulis, cujusmodi IO, quorum singula basim habent semissem lateris B D, & altitudinem radium rectum A C. Sed hæc sex rectangula æquantur uni rectangulo, cujus basis est sex semisses lateris polygonì, & altitudo idem radius rectus AC; quale est rectangulum I M, & hæ sex semisses efficiunt dimidium perimetrum figuræ. Ergo area figuræ datæ æquatur rectangulo, cujus basis est semissis perimetri, & altitudo radius rectus.

Corollarium.

Area circuli est æqualis rectangulo habenti basim dimidiam peripheriam, & altitudinem radium. Hoc manifestè sequitur ex natura circuli, qui cùm sit polygonum regulare infinitis constans lateribus, ad præsentem spectat propositionem. Ejus radius rectus non differt ab ejus radio, nam latus infinitè parvum hujus polygoni regularis est circumferentiæ punctum.

Pervulgata itaque propositio de circuli quadratura eò tendit, ut inveniatur linea æqualis dimidiæ peripheriæ.

Aliter expiimi potest hæc propositio, eaque commodè demonstrari methodo indivisibilium modo sequenti.

Area circuli æquatur triangulo rectangulo, cujus unum latus æquatur circumferentiæ, aliud verò radio circuli.

Sit circulus (*fig.* 112.) B H I; & linea B C, ejus tangens in puncto B, supponatur æqualis circumferentiæ B H I; ex centro A ducatur linea A C formans triangulum rectangulum A B C. erit area hujus triangulì æqualis areæ circuli H I B.

Quod ut ostendatur, consideretur, numerum infinitum circumferentiarum concentricarum, quæ replent aream maximi circuli, mensurari radio A B; hoc est, tot dari circumferentias concentricas, quot puncta continet linea A B.

Consideretur item ex alia parte, numerum linearum parallelarum lineæ B C, quæ simul replent aream trianguli A B C, men-

menſurari eodem radio AB, hoc eſt tot dari parallelas lineæ BC, quot puncta inſunt in linea AB. Ergo tot dantur circumferentiæ concentricæ in area maximi circuli, quot lineæ parallelæ in area trianguli. Si ergo quævis parallela, ut FG, aut DE æquetur circumferentiæ cuivis ſibi correſpondenti, ut FKL, ſeu DMN, habebitur perfecta æqualitas in utraque area, hoc eſt, utraque erit repleta pari numero magnitudinum æqualium, & conſequenter area maximi circuli erit æqualis areæ trianguli.

Facilè porro oſtendi poteſt, quamlibet tangentem, ut FG, æquari circumferentiæ ſibi correſpondenti, ut FKL. Nam circumferentia HIB eſt ad circumferentiam KLF, ut radius AB ad radium AF per coroll propoſ 5 hu lib; ſed radius AB eſt ad radium AF, ut linea BC ad lineam FG ob triangula ABC, AFG ſimilia. Ergo circumferentia HIB eſt ad circumferentiam KLF, ut linea BC ad lineam FG; nam duæ rationes eidem rationi æquales, ſunt æquales inter ſe. *Alternando* circumferentia HIB eſt ad lineam BC, ut circumferentia KLF ad lineam FG. atqui circumferentia HIB ſupponitur æqualis lineæ BC. Ergo & circumferentia KLF eſt æqualis lineæ FG, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXIV.

PROBLEMA.

Figuram certo laterum numero conſtantem in aliam ejuſdem areæ tranſmutare, eamque, ſi velis, in trigonum convertere. (fig. 116.)

Figura tranſmutanda ſit pentagonum irregulare ABCDE.

Reducatur ad figuram quadrilateram hoc modo. Puncta C, E jungat linea CE, cui ex puncto D parallela ducatur DF occurrens lateri AE in F protracto, a quo puncto F agatur linea FC. Quadrilaterum ABCF æquabitur pentagono ABCDE: nam triangulum CFE æquatur triangulo EDC, cùm habeant eandem baſim CE, & exiſtant inter eaſdem parallelas CE, DF. Dempto igitur triangulo EDC pentagoni, & ſubſtituto triangulo CFE illi æquali, habebitur quadrilaterum ABGF dato pentagono ABCDE æquale.

Deinde hoc quadrilaterum ABCF commutetur in triangu-

lum

ſum F C G, quod facili negotio fieri poteſt. Puncta A, G connectat linea A G, ad quam per B ducatur parallela B G, quæ ſecet latus E A productum in G; junctiſque punctis C, G linea C G, habetur triangulum F C G æquale ob eandem rationem quadrilatero A B C F, & conſequenter pentagono A B C D E.

Quod ſi triangulum E C G (*Tab. 12 fig. 117*) mutandum ſit in triangulum iſoſceles ejuſdem areæ; per unum ex punctis E, C, G ducatur parallela lateri oppoſito, ut ex puncto C parallela H I lateri E G, ductiſque perpendicularibus E H, G I, habebitur rectangulum G H, cujus area dupla eſt areæ trianguli E C G, habet enim eandem cum illo & baſim, & altitudinem.

Si inter lineas E H, & E G reperiatur media proportionalis, ut K L (*fig. 118*), quadratum ejus lineæ erit æquale rectangulo G H.

Quod quadratum ſupponatur K N. ducta diagonali L M, quadratum dividitur in duo iſoſcelia triangula, quorum utrumque habebit aream æqualem areæ trianguli E G C.

LIBER NONUS.

De comparatione Areæ Figurarum.

PROPOSITIO I.

Rectangula eandem baſim habentia, ſunt inter ſe ut altitudines, & habentia eandem altitudinem, ſunt inter ſe ut baſes.

Memoria repetas, oportet, rationem duarum magnitudinum eandem ſemper manere, ſi illæ per eandem magnitudinem ducantur, ſic A . B :: A C . B C.

Sicuti etiam, rectangulum eſſe vel baſim in altitudinem, vel altitudinem in baſim ductam.

Itaque cùm duæ baſes æquales ſint duæ magnitudines æquales, conſiderari poſſunt, ut eadem magnitudo. Si ergo hæc magnitudo ſibimetipſi æqualis multiplicet duas altitudines inæqua-

quales, duo producta ſunt duo rectangula, quæ neceſſario retinent inter ſe rationem illam, quam hinc multiplicationem habebant altitudines inæquales.

Ut ſi ſint duæ altitudines A, B, ducta altitudine A in baſim C, habetur A C; & ducta altitudine B in baſim C, provenit B C: eſt autem manifeſtum, A . B :: A C . B C.

Idem dicendum de baſibus inæqualibus in eandem altitudinem ductis.

PROPOSITIO II.

Rectangula ſunt inter ſe in ratione compoſita baſeos ad baſim, & altitudinis ad altitudinem. (fig. 119.)

Sint rectangula A B C D, E F G H, habentia altitudines A B, E F, & baſes B D, F H diſpoſitas, ut in figura, hoc eſt altitudo unius alterius altitudini, & baſis baſi proximæ ſint. Hinc duæ habentur rationes, ſcilicet ratio A B ad E F, quæ eſt altitudinum, & ratio B D ad F H, quæ eſt baſium.

Ut ex his datis duabus rationibus una ratio componatur, ut ſuprà jam dictum eſt, multiplicari debere terminos antecedentes inter ſe, ſicut & conſequentes. Jam ex ductu antecedentis A B in antecedentem B D habetur primum rectangulum A D, & ex ductu conſequentis E F in conſequentem F H habetur ſecundum rectangulum E H. Ergo hæc duo rectangula efficiunt unam rationem compoſitam ex duabus rationibus, hoc eſt ex rationibus altitudinis ad altitudinem, & baſis ad baſim.

PROPOSITIO III.

Rectangula ſimilia, hoc eſt, habentia latera proportionalia, ſunt in ratione duplicata baſium, vel altitudinum. (fig. 120.)

Sit altitudo A C ad altitudinem E G, ut baſis C D eſt ad baſim G H.

Per præced propoſitionem rectangula ſunt inter ſe in ratione compoſita baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem: atqui hæ duæ rationes hîc ſupponuntur æquales. Ergo ratio, quæ ex illis componitur, eſt ratio duplicata unius, vel alterius componentium.

Sic ſi v. g. baſis CD ſit ſemiſſis baſeos G H, altitudo A C erit ſemiſſis altitudinis E G, & majus rectangulum erit minoris quadruplum, nam ratio duplicata 1 ad 2 eſt 1 ad 4; cùm 1. 2 :: 1. 2; multiplicatio autem antecedentium eſt 1, conſequentium verò eſt 4.

Corollarium I.

Parallelogramma ſimilia ſunt in ratione duplicata laterum homologorum, nam baſis eſt ad baſim, ut altitudo ad altitudinem.

Corollarium II.

Triangula ſimilia ſunt in duplicatâ ratione laterum homologorum, cùm enim ſint ſemiſſes parallelogrammorum ſimilium, eorum baſes ſunt inter ſe, ut altitudines

Corollarium III.

Figuræ regulares circulo inſcriptæ, vel circumſcriptæ ſunt inter ſe in ratione duplicata ſuorum aut laterum, aut radiorum, aut radiorum rectorum. Hæ tres rationes cùm ſint æquales in omnibus figuris regularibus, ſi ſunt in ratione duplicata unius, erunt quoque in ratione duplicata alterius. atqui manifeſtè patet, duo v. g. hexagona eſſe in ratione duplicata ſuorum laterum, quodlibet enim hexagonum dividitur in ſex triangula perfectè æqualia, & quodlibet triangulum unius hexagoni eſt ad quodlibet triangulum alterius in ratione duplicata baſis ad baſim, cùm ſint ſimilia. Ergo ſex triangula unius ſunt ad ſex triangula alterius in duplicata ratione ſuorum laterum.

Corollarium IV.

Circuli ſunt inter ſe in ratione duplicata ſuorum radiorum; nam circuli ſunt polygona regularia infinitis conſtantia lateribus. Si itaque proponantur duo circuli, quorum unus habeat radium triplum radii alterius, area illius erit novies major area hujus.

Corollarium V.

Quadrata ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum, ſunt enim rectangula.

Co-

Corollarium VI.

Circuli ſunt inter ſe, ut quadrata radiorum; quadrata enim radiorum ſunt in ratione duplicata radiorum non minus, quàm ſint ipſi circuli.

Corollarium VII.

Si ſuper tribus lateribus cujuſvis trianguli rectanguli deſcribantur tres figuræ quæcunque ſimiles, ea, quæ deſcripta erit ſuper hypotenuſa, æquabitur duabus ſimul reliquis. Nam figuræ ſimiles ſunt in ratione duplicata laterum homologorum, hoc eſt, ut quadrata laterum; atqui jam oſtenſum eſt, quadratum hypotenuſæ æquari quadratis duorum reliquorum laterum. Ergo figura deſcripta ſuper hypotenuſa eſt æqualis figuris deſcriptis ſuper duobus reliquis lateribus, cùm hæc figura ſit ad duas illas figuras, ut quadratum ad duo alia quadrata.

Ex hoc ultimo corollario habetur methodus exactè inveniendi aream cujuſdam ſpacii circumferentiarum portionibus clauſi, licèt ad hanc uſque diem impoſſibile fuerit, geometricè invenire aream circuli, cùm ejus circumferentiæ longitudo perfectè nequeat haberi. Quamvis enim notum ſit, aream circuli æquari rectangulo ſub dimidia peripheria, & radio; cùm tamen dimidia hæc peripheria geometricè menſurari non poſſit, nec ſciatur, quamnam habitudinem ad lineam rectam habeat; ideò omnino exactè hujuſmodi rectangulum haberi non poteſt. Nihilominus en quomodo habeatur geometricè area quorundam ſpaciorum, quæ ferè Lunulæ appellantur; cujus rei inventionem ex antiquis Geometris, cui nomen Hyppocrates, adſcribitur.

Habeatur triangulum rectangulum iſoſceles (*fig.* 121.) A B C: ſuper ſingulis lateribus, tanquam diametris ſumptis, deſcribantur dimidiæ circumferentiæ A G B D C, A F E, C E B.

Spacium clauſum inter quadrantem circuli A G B, & dimidiam circumferentiam A F B Lunula dicitur, ſicut & aliud ex altera parte. Hę duę Lunulę ſimul ſumptę æquantur triangulo A B C; nam ex hoc ultimo corol. area dimidiæ circumferentię A G B D C duabus areis ſemicirculorum A F B, C E B æquatur, ſed ablatis ab area majoris circuli portionibus A G B H, C D B I, reſtat triangulum A B C, & ablatis iiſdem portionibus ab area circumferentiarum A F B, C E B, reſtant duæ Lu-

nulæ AFBG, CEBD Ergo reſidua ex utraque parte ſunt æqualia. Ergo Lunulæ æquantur (aræ) trianguli ABC, cujus ſemiſſis AKB æquatur alterutri ex illis Lunulis.

Admirari ſatis nemo poteſt, humanam mentem hucuſque nullam reperiſſe viam, qua circuli quadraturam aſſequeretur, cùm tamen tam facili negotio menſuretur ſuperficies duabus portionibus circumferentiarum terminata. Sed mox quædam alia videnda ſuperſunt, quæ magis magiſque humanum ingenium in ſuæ infirmitatis cognitione confirment.

PROPOSITIO IV.

De Incommenſurabilibus.

Diagonalis quadrati eſt incommenſurabilis ſuo lateri. (fig. 122.)

Sit quadratum ABCD, cujus diagonalis AD. Solùm oſtendendum eſt, lineam AD ad lineam AC non eſſe, ut numerum ad numerum.

Memoria recolamus 1. rationem duplicatam cujuſvis rationis numeri ad numerum neceſſariò habere exponentes numeros quadratos. 2. rationem duplicatam, quæ non habet pro exponentibus numeros quadratos, non eſſe rationem duplicatam rationis numeri ad numerum, ſeu, ut aliter exprimatur, rationem illam, cujus illa eſt duplicata, non eſſe rationem numeri ad numerum, ut jam de utroque oſtenſum eſt.

Jam per 5. coroll. prop. 3. h lib quadratum lineæ AD eſt ad quadratum lineæ AC in ratione duplicata rationis lineæ AD ad lineam AC. Ergo ſi quadrata linearum AD, AC non habent exponentes numeros quadratos, ratio lineæ AD ad lineam AC erit ſurda: ſed exponentes numeri horum quadratorum ſunt 2, 1 per 14 lib. 8., nam triangulum ACD eſt rectangulum, & latus AC æquale eſt lateri DC, ideoque quadratum hypotenuſæ AD duplum eſt quadrati lateris AC. Ergo ratio, cujus hæc ratio 2, 1 eſt duplicata, non eſt ratio numeri ad numerum; hoc eſt ratio diagonalis AD ad latus AC eſt ſurda, ſeu non eſt ratio numeri. Quare hæ duæ lineæ AD, AC nullam habent communem menſuram. Ergo &c.

Quod tamen dicendum non eſt de earum quadratis, illa enim com-

commenſurabilia ſunt, ſeu ſunt ut numerus ad numerum; unum enim eſt ad aliud, ut 2 ad 1.

Ut hoc Geometræ explicent, dicere ſolent, diagonalem, & ejus latus eſſe incommenſurabilia longitudine, commenſurabilia tamen potentia, hoc eſt, eorum quadrata non eſſe incommenſurabilia.

Verùm facilè negocio inveniri poſſunt lineæ, quæ & longitudine, & potentia ſint incommenſurabiles, hoc eſt, quarum quadrata non habeant habitudinem, quæ per numeros exprimi poſſit. Sufficit enim invenire lineam mediam proportionalem inter diagonalem, & latus per 10 hb 6. Hæc media proportionalis erit incommenſurabilis longitudine, & potentia reſpectu lateris, & diagonalis.

Supponatur (*fig.* 123) linea E F media proportionalis inter latus A C, & diagonalem A D. In primis certum eſt, rationem lineæ A C ad lineam A D eſſe duplicatam rationis lineæ A C ad lineam E F. Nam ſi nominetur

A C . . . x
E F . . . y
A D . . . z

erit ex hypoth x. y :: y. z. Si ergo ducantur inter ſe antecedentes, ſimiliter & conſequentes, habebitur ratio compoſita x y, z y: atqui hæc ratio non diſtinguitur a ratione x ad z x. z :: x y. z y; cùm hæc ratio ſit multiplicata per eandem magnitudinem y. Ergo ratio x ad z eſt compoſita ex ratione x ad y, & ex ratione y ad z, quæ ſunt duæ rationes æquales. Ergo ratio x ad z eſt duplicata rationis x ad y, hoc eſt, ut ſupra dictum eſt, ratio lineæ A C ad lineam A D eſt duplicata rationis lineæ A C ad lineam E F.

Ergo linea A C eſt incommenſurabilis lineæ E F; nam earum ratio duplicata, quæ eſt ratio lineæ A C ad lineam A D, tantùm non habet exponentes numeros quadratos, ut nullum prorſus numerum habeat exponentem.

Deinde etiam quadratum lineæ A C eſt incommenſurabile quadrato lineæ E F, nam quadratum lineæ A C ad quadratum lineæ E F eſt in ratione duplicata lineæ A C ad lineam E F, hoc eſt, ut linea A C ad lineam A D. ſed ex hypot linea A C eſt incommenſurabilis lineæ A D. Ergo quadratum lineæ A C eſt incommenſurabile quadrato lineæ E F.

Hinc colligitur, infinitas lineas incommenſurabiles haberi poſſe,

ſe, ſi nimirum quærantur aliæ mediæ proportionales, ut inter lineas A C, & E F, & ſic deinceps.

Conſiderationes de Incommenſurabilibus.

Nihil eſt, quod majorem admirationem moveat, quàm hæ veritates oſtenſæ de incommenſurabilibus. Lineæ A C, & A D (*fig.* 123.) ſingulæ habent infinitas aliquotas ſimiles; & tamen in infinito illo numero nunquam invenirí poteſt una, quæ utriuſque lineæ aliquota eſſe queat.

Poterit ſumi v. g. centies milleſima pars lineæ AC, ducenties milleſima, quatercenties milleſima, & ſic deinceps in infinitum duplicatis terminis; nunquam tamen reperietur una ex his minimis partibus, quę aliquoties exactè contineatur in linea A D

Poſſent itidem ſumi infinitæ aliæ aliquotæ lineæ A C ordinis diverſi omnino, ut tercenties milleſima pars, nongenties milleſima, & ſic deinceps triplicatis terminis, abſque eo, quod in hac infinitorum infinitate invenirí poſſit pars aliquota, quæ exactè lineam A D dimetiatur.

Veritas hęc oſtenſa oſtendit evidentiſſimè diviſibilitatem materiæ in infinitum, ſeu, ut aliter explicetur, extenſionem conflare non poſſe ex indiviſibilibus, ſi enim latus v. gr. quadrati compoſitum eſſet ex indiviſibilibus, contineret ex illis neceſſariò certum aliquem numerum; ideoque unum ex his indiviſibilibus eſſet aliquota lateris. Si deinde ſumatur unum ex illis indiviſibilibus, ſeu aliquotis, ut menſuretur diagonalis, illud in ea continebitur aliquoties vel præcisè, vel cum reſiduo. Si aliquoties præcisè. Ergo diagonalis eſt lateri commenſurabilis; quod tamen impoſſibile eſſe, oſtenſum eſt: ſi verò aliquoties cum reſiduo; quid eſt reſiduum indiviſibilis? neceſſariò hoc minus erit, quam aliquota, cujus eſt reſiduum. Ergo hęc aliquota non erat indiviſibilis, quod eſt contra hypoth. Quare extenſio non conſtat ſolis indiviſibilibus.

Si hoc oſtenſum non eſt, nihil oſtenſum plane eſt, dicere enim, ut nonnulli ſolent, nullum quadratum perfectum dari poſſe, & conſequenter neque latera, neque diagonales, ridicula omnino ratiocinatio eſt.

Neceſſarium non eſt, actu quadrata, triangula, circulos in mundo dari, ut ſtabiliatur veritas geometricarum demonſtrationum: eorum poſſibilitas ſufficit. Licèt Deus nunquam creaſ-

ſet

ſet materiam, ea tamen fuiſſet ſemper poſſibilis. Quilibet intellectus, cui Ille veritates geometricas revelaſſet, jam illas perfectè intellexiſſet. Saltem illud Ens ſupremum, fons, & origo totius veritatis, cognoviſſet, triangulum poſſibile eſſe parallelogrammi poſſibilis ſemiſſem. Illud quoque temerè diceretur, licèt non daretur nunc inter homines, qui perfectum quadratum poſſet invenire, impoſſibile quoque fuiſſe Illi, qui materiam creavit, partiunculam aliquam in quadrato perfecto claudere. Quare ſine controverſia indiviſibilium veritates ſubſiſtunt.

En igitur oſtenſum, puncta eſſe impoſſibilia verùm en contraria omnino demonſtratio. Si punctum eſt impoſſibile, quid ergo eſt concurſus duorum laterum, quę quadrati angulum efficiunt? Itidem ſi punctum eſt impoſſibile, circulus quoque eſt impoſſibilis. Si enim Deus formet ſphęram perfectam, quam ſuper perfecto plano ponat, punctum contactus habebitne aliquam extenſionem? ſi extenſionem habet, ſuperficies, vel linea ſaltem eſt; ideoque tangens, & circulus communem habebunt extenſionem, quod eſt contra 11 lib 3. Quod ſi fortè reponatur, neque Deum poſſe perfectum circulum efficere, rectius multo eſſet aſſerere, Deum non eſſe, quàm ejus potentiam tam ridiculè definire.

Inſuper cùm attentè entium exiſtentia conſideratur, clariſſimè cognoſcitur, exiſtentiam ad unitates, non autem ad numeros pertinere. Explicatur

Viginti v. g. homines non exiſtunt, niſi quia quivis homo exiſtit; numerus enim non eſt niſi extrinſeca quædam denominatio, ſeu rectius repetitio unitatum, quibus ſolis exiſtentia competit. Nunquam haberi poſſent numeri, niſi haberentur unitates nec unquam haberi viginti homines, niſi haberetur unus homo. Quibus benè cognitis, ſi quæratur an v. g. pes cubicus ſit una tantùm ſubſtantia, an plures? dici non poteſt, quod ſit una tantum ſubſtantia, alioquin neque in duas tantùm dividi poſſet. neque quod ſit plures, nam ſi eſſet plures, hic numerus, quicunque tandem ſit, compoſitus eſſet unitatibus, ſi dantur plures ſubſtantiæ exiſtentes, neceſſe eſt, unam quoque dari; & hæc una non poteſt eſſe duæ. Ergo materia conſtat ſubſtantiis indiviſibilibus.

En humana ratio ad extrema adducta. Geometria oſtendit diviſibilitatem materiæ in infinitum, & tamen eodem tempore indiviſibilibus illam conſtare evincit. Rurſus igitur cedant hominum

num animi, & tandem aliquando cognoſcant, menti creatæ, excellentiſſimæ licèt, non convenire, illas veritates conciliare, quarum nexum Creator ipſe voluit occultare. Hac quaſi via ad myſteriorum fidem ducentur hominum mentes, & aſſuefient illas veneran veritates, quæ ſuapte natura ab illis penetrari non poſſunt, cùm videant ſe ita angustis clauſi terminis, ut ne mathematicas quidem demonſtrationes valeant conciliare.

LIBER DECIMUS.

De Solidis.

SOlidum, ſeu corpus appellatur extenſio conſiderata ſecundum tres ſuas dimenſiones, longitudinem ſcilicet, latitudinem, & profunditatem.

Solidorum alia ſunt regularia, irregularia alia, ſecundum plures ſpecies. Ut ſi ſupponatur aliquod quadratum fluere per aliquam perpendicularem, ſibimenpſi parallelum, formabit figuram ſolidam, quæ Parallelepipedum dicitur. Si perpendicularis lateri quadrati æquetur, corpus Cubus appellatur.

Si loco quadrati fluat circulus ſibipſi parallelus, ejus peripheria deſcribet ſuperficiem illius ſolidi, quod Cylindrus nominatur.

Si ſumantur quæcunque aliæ figuræ rectilineæ, ut Triangulum, Pentagonum, Hexagonum, quę ſibimetipſis parallelæ fluant, efficient ſolidum, quod appellabitur Priſma Triangulare, Pentagonale, Hexagonale, &c.

Si, ſumpta tanquam baſi aliqua figura regulari rectilinea, ſupponatur ex ejus centro linea perpendiculariter elevari, & ab extremitate hujus lineæ, quæ ſurſum eſt, ad ſingulos angulos figuræ, quæ baſeos vicem gerit, ducantur lineæ, ſolidum clauſum omnibus triangulis, quæ hiſce lineis, & baſeos lateribus terminantur, dicitur Pyramis regularis, Triangularis, Pentagonalis, &c. juxta baſeos nomen.

Punctum perpendicularis, a quo omnes illæ lineæ ducuntur, Vertex pyramidis dicitur. Perpendicularis ſimpliciter appellatur Perpendicularis pyramidis: & ſuperficies duabus proximis lineis a vertice ductis clauſæ, Latera pyramidis nominantur.

Si

Si pro figura rectilinea ſumatur circulus tamquam baſis, ex cujus centro erecta perpendicularis, intelligatur, ab hujus altitudine ad ſingula peripheriæ puncta lineas duci, fiet ſolidum appellatum Conus regularis, ſeu rectangulus.

Si ſupponatur circulus circa ſuam diametrum immotam in gyrum agi, formabitur corpus regulare, quod Sphæra appellatur.

Diameter circuli dicitur Axis Sphęræ.

Axis extremitates appellantur Poli Sphęræ.

Sphęræ centrum, evidens eſt, eſſe idem, quod habet circulus, qui eam genuit.

In Sphęra infinita corpora irregularia inſcribi poſſunt; verùm regularia quinque tantum, ſcilicet

Corpus clauſum quatuor triangulis æquilateris, quod dicitur Tetraedrum.

Corpus clauſum ſex quadratis æqualibus, quod dicitur Cubus.

Corpus clauſum duodecim pentagonis, quod dicitur Dodecaedrum.

Corpus clauſum octo triangulis æquilateris, quod dicitur Octaedrum.

Corpus clauſum viginti triangulis æquilateris, quod dicitur Icoſaedrum.

Ut commodè oſtendantur præcipuæ Solidorum proprietates, adhibenda eſt Geometria Indiviſibilium, quæ mirum in modum hujuſmodi demonſtrationes juvat.

Supra dictum eſt, hanc conſiſtere in conſiderandis ſuperficiebus, tanquam ſi lineis parallelis conſtarent. Sic parallelogrammum nihil aliud eſt, quam baſis fluens ſibiipſi parallela per omnia perpendicularis puncta; ex quo ſequitur, baſim rectanguli, aut quadrati, aut parallelogrammi toties in ſua area contineri, quot inſunt puncta in perpendiculari, ideoque, ut habeatur hæc area, ducendam tantumeſſe baſim in perpendicularem.

Eadem analogia conſiderari poſſunt ſolida, tanquam ſi compoſita eſſent ſuperficiebus parallelis. Sic Priſma nihil aliud eſt, quàm infinitæ figuræ regulares ſuperimpoſitæ ſibimetipſis parallelæ, ſive defluentes per omnia perpendicularis priſmaris puncta, ac proinde ejus ſolliditas nihil eſt aliud, quàm baſis toties ſumpta, quot puncta inſunt in ejus perpendiculari. Quare ut habeatur priſmaris ſolliditas, nihil aliud agendum eſt, quam baſim in perpendicularem ducere.

Hinc ſine alia demonſtratione clarè ſequitur: Priſmata eandem baſim, & altitudinem habentia, eſſe æqualia. Priſmata eandem habentia baſim, eſſe inter ſe, ut altitudines. Priſmata eandem habentia altitudinem, eſſe inter ſe, ut baſes.

Idem de Cylindris dicendum; conſiderantur enim tanquam priſmata regularia infinitis conſtantia lateribus, & circulum pro baſi habentia.

Sequitur etiam, Priſmata obliqua, ſcil illa, quorum lineæ, quæ per verticem, & baſeos centrum tranſeunt, non ſunt baſi perpendiculares, æquari priſmatibus perpendicularibus, ſeu regularibus eandem baſim, & perpendicularem altitudinem habentibus.

Idipſum de cylindris obliquis reſpectu cylindrorum rectorum dicendum eſt.

Nam ſi conſideretur ſoliditas cylindri, ſeu priſmatis perpendicularis diviſa in aliquem determinatum portionum baſi parallelarum numerum, ſumma portionum, quæ reperietur in priſmate perpendiculari, æquabitur ſummæ, quæ inerit in priſmate obliquo, nam priſmata obliquum, & rectum poſſunt contineri inter duas parallelas, & ſupponuntur eandem habere altitudinem.

Colligitur etiam, plura priſmata, quorum baſes ſimul ſumptæ æquantur uni tantùm baſi, æquari ſecundum ſoliditatem illi priſmati, quod hanc tantum baſim illis æqualem, & altitudinem eandem habebit.

Et conſequenter, quodvis priſma polygonum dividi poſſe in tot priſmata triangularia, quot habet latera, & omnia hæc priſmata triangularia ſimul ſumpta æquari priſmati totali.

PROPOSITIO I.

Pyramides eandem baſim, & altitudinem habentes, ſunt æquales. (fig. 124.)

Concipiantur Pyramides diviſæ in quemvis ſectionum baſi parallelarum numerum. Si quælibet ſectio cuilibet ſectioni correſpondenti æquetur, & perpendicularis M A æqualis ſit ex hypoth. perpendiculari F N, tot ſectiones erunt in una parte, quot in alia, & conſequenter erit in utraque parte æqualis ſumma ſectionum ſibi invicem æqualium, ac proinde totum toti æqua-

le.

le. Ut autem oſtendatur, ſectionem ſectioni correſpondenti æquari, ſupponendum eſt, ſic tenues, ſubtileſque ſingulas eſſe, perinde ac ſi ſimplices ſuperficies figurarum forent, ita enim demonſtrabitur, ſingulas figuras ſingulis correſpondentibus æquari.

Sint D A E, I F L facies duarum pyramidum ejuſdem ex hypoth. altitudinis inter parallelas A F, D L, quarum vertices A, F.

Supponatur planum aliquod baſibus parallelum, quod facies fecet, cujus ſectiones B C, G H parallelæ ſint lineis æqualibus D E, I L, quarum utraque eſt unum latus baſium æqualium pyramidum. In faciebus D A E, I F L facile eſt oſtendere, lineam B C lineæ G H æquari: nam linea D E eſt æqualis lineæ I L; & per 6. lib. 6 baſis B C eſt ad baſim G H, ut baſis D E ad baſim I L: idem oſtendetur de quacunque pyramidum facie. Ergo ſectio, cujus B C eſt unum latus, æquatur ſectioni, cujus G H eſt unum latus. Ergo duæ pyramides ſoliditate æquantur.

Corollarium.

Pyramides eandem habentes baſim ſunt inter ſe, ut altitudines; & pyramides eandem habentes altitudinem, ſunt inter ſe, ut baſes. Hinc infertur

Si plures pyramides ſimul ſumptæ ejuſdem ſingulæ ſint altitudinis, cujus quædam alia pyramis, quæ baſim habeat æqualem omnibus illarum baſibus, erit hæc pyramis ſolidrate æqualis omnibus illis

PROPOSITIO II.

OMne priſma triangulare dividi poteſt in tres pyramides ſoliditate æquales, ideoque omnis pyramis triangularis eſt tertia pars priſmatis eandem baſim, & altitudinem habentis. (fig. 125.)

Sit Priſma A B E F C D inſiſtens uni ex ſuis faciebus, quæ ſit rectangulum C D E F, reliquæ verò duæ facies ſint rectangula A B C D, A B F E. Singulis rectangulis diviſis per diagonales B C, B F, D F, oriuntur tres pyramides F B C A, F E D B, F C D B. hæ tres pyramides neceſſariò erunt æquales, nam ſingulæ conſiderari poſſunt tanquam habentes baſim

ſemiſſem rectanguli, hoc eſt triangulum, & altitudinem perpendicularem reliquorum triangulorum ACF, BDE.

Ut prima pyramis FBCA baſim habet triangulum ABC, & altitudinem perpendicularem, quæ ex vertice F ſupra latus AC caderet.

Pyramis ſecunda FEDB baſim habet triangulum FED, & altitudinem perpendicularem, quæ ex puncto B caderet ſupra latus DE.

Pyramis tertia FCDB baſim habet triangulum CDF, & altitudinem eandem perpendicularem, quam ſecunda. Ergo hæ tres pyramides ſoliditate æquantur, & conſequenter priſma triangulare æquale eſt tribus pyramidibus eandem & baſim, & altitudinem habentibus.

Corollarium I.

Quod de pyramide triangulari reſpectu ſui priſmatis triangularis oſtenſum eſt, facili negocio applicatur cuicumque alii pyramidi pentagonali, hexagonali, &c. collatæ cum priſmate ejuſdem generis, omne enim priſma reduci poteſt in priſmata triangularia, non minus ac omnis pyramis in triangulares pyramides reſolvi valeat, & omnes baſes horum ſolidorum triangularium ſimul ſumptæ cum æquentur baſi totali, & altitudines ſint eædem, efficiunt perfectam æqualitatem in utraque parte, adeo ut ſicut omnes pyramides triangulares æquantur pyramidi totali, ita etiam omnia priſmata triangularia æquentur priſmati totali, ideoque pyramis totalis eſt tertia pars priſmatis totalis.

Corollarium II.

Conus eſt tertia pars cylindri eandem cum illo baſim, altitudinemque habentis; nam Conus nihil aliud eſt, quàm pyramis regularis infinita habens latera, ſicut & cylindrus eſt priſma regulare infinitis conſtans lateribus.

PROPOSITIO III.

Solidum ſemidiæ ſphæræ æquatur duabus tertiis cylindri ejuſdem baſeos, & altitudinis. (Tab. 13. fig. 126.)

Sup-

Supponatur Cylindrus habens basim circulum, cujus diameter B A C, & altitudo B N semis diametri B C terminata a linea N L O æquali diametro B C, quæ N L O sit diameter circuli oppositi basi cylindri. In plano rectanguli B C O N describantur & semicirculus B L C exhibens dimidiam sphæram, & triangulum N A O repræsentans conum habentem basim circulum, cujus diameter N O, ideoque æqualem basi cylindri.

Ut autem id melius concipi possit, intelligatur rectangulum B C N O circumagi circa axem A L. Linea N B describet cylindricam superficiem, circulus B L C dimidiam sphæram, & triangulum N A O conum.

Linea L A est axis communis tam cylindro, quàm cono, & dimidiæ sphæræ. Ducatur linea D K parallela diametro B C. linea hæc D K circumacta circa axem A L describet circulum parem basi cylindri, necnon planum, quod secabit dimidiam sphæram in punctis E, I, & conum in punctis F, G, quæ sectio F G, ut patet, erit circulus, cujus diameter F G.

Totus conus N A O nihil aliud est, quàm innumeri circuli sibipsis parallelli invicem superpositi, cujus summa, quæcunque tandem sit, mensurabitur perpendiculari A L, ita ut si perpendicularis A L supponatur continere 100000 partes, conus N A O pariter in soliditate continebit 100000 circulos parallelos.

Si a cylindro demarur solidum dimidiæ sphæræ, relinquetur species quædam solidi excavati, quod scutella dicitur, cujus prospectus, seu sectio exhiberur figura N B E L I C O. Scutella hæc quantum ad soliditatem componitur infinitis planis parallelis invicem superpositis, quæ in modum coronæ sphæram circumdant: ut cum linea D K vertitur in gyrum circa axem A L, ejusque portio F G describit unum ex circulis coni, reliqua ejus portio D E, seu I K describit circa sphæram planum, quod illam per modum coronæ cingit, quodque habet latitudinem D E. Atqui scutella necessariò in sua soliditate tot coronas continet, quot sunt circuli paralleli in coni soliditate; nam summam metiuur eadem perpendicularis L A, seu N B.

Si ergo ostendi possit, coronam, cujus latitudo D E, æquari quantum ad aream circulo, cujus diameter F G, idem quoque dicendum erit de singulis aliis coronis collatis cum sibi correspondentibus circulis in cono, & consequenter summa totalis coronarum, quæ scutellam formant, æquabitur summæ totali circulorum, qui conum efficiunt. Quare scutellæ solidum solidi

Digitized by Google

ditati coni erit æqualis. Unde cùm jam oſtenſum ſit, conum, ut NAO, eſſe tertiam cylindri, ut BCON, partem; etiam ſcutella ejuſdem erit tertia pars, & per conſequens dimidia ſphæra erit duæ tertiæ.

Igitur oſtendendum tantùm eſt, dari æqualitatem inter coronam DE, & circulum, cujus diameter FG. Ex puncto E demittatur perpendicularis EH, ducaturque radius AE.

Patet. lineas DM, BA, EA æquari inter ſe, ideoque unam pro alia ad ſubitum ſumi poſſe. ſimiliter, inter ſe æquari lineas EH, MA, MF propter æqualitatem linearum AL, LN; & per conſequens has quoque ad placitum vicißim poſſe ſumi.

Triangulum EHA rectangulum eſt. Ergo circulus, cujus radius eſt hypotenuſa AE, æqualis erit duobus circulis, quorum radii ſunt reliqua latera EH, HA per 7. coroll. prop. 3. lib. 9.

Si ergo circulus, cujus radius EA mulctetur circulo, cujus radius AH, ſupererit valor areæ circuli, cujus radius EH.

Hoc eſt ſumptis lineis æqualibus, ſi a circulo, cujus radius DM, dematur circulus, cujus radius EM, reſtabit valor areæ circuli, cujus radius FM.

Atqui cùm a circulo, cujus radius DM, auferatur circulus, cujus radius EM, efformatur corona, cujus latitudo DE. Ergo hæc corona æquatur areæ circuli, cujus radius FM.

PROPOSITIO IV.

Superficies dimidiæ ſphæræ æquatur ſuperficiei cylindricæ ejuſdem cum illa baſis, & altitudinis. (fig. 127.)

Sit rectangulum DBCE. Ex puncto A baſis medio ducantur lineæ AD, AE, & perpendicularis AG. Si hoc rectangulum circa axem AG circumagi concipiatur, latera BD, EC cylindricam ſuperficiem, lineæ verò AD, AE conum deſcribent.

Si a cylindro DBCE demetur ſoliditas coni DAE, reſtabit ſpecies quædam Infundibuli, cujus proſpecturo, ſeu ſectionem exhibet figura BDAEC.

Infundibulum hoc quatenus ad ſoliditatem æquatur hemiſphærio BGC, cùm utrumque ſit duæ tertiæ cylindri, cujus conus DAE eſt una tertia.

Quibus poſitis, concipiatur mente divisa dimidia ſphæra in infinita

nita galericula circulis concentricis repræſentata: dividatur quoque mente infundibulum in infinitas ſuperficies concentricas, hoc eſt, lineam A G tanquam axem habentes. Manifeſtum eſt, tot galericula reperiri in dimidiæ ſphęræ ſoliditate, quot ſuperficies cylindricæ inſunt in infundibulo, cùm utraque ſumma, quęcunque tandem ſit, menſuretur radio A B. Item manifeſtum eſt, maximam ſuperficiem cylindricam B D eſſe ad maximam ſuperficiem ſphęricam B G C, ut ſuperficies cylindrica F I eſt ad correſpondentem ſuperficiem ſphæricam F K L. Jam cùm totum infundibulum æquetur toti dimidiæ ſphęræ, hoc eſt, ſumma galericulorum æqualis ſit ſummæ ſuperficierum cylindricarum, ſi primum galericulum majus, vel minus foret prima ſuperficie cylindrica, quodlibet aliud galericulum majus, vel minus eſſet ſuperficie cylindrica ſibi correſpondente, & totum unius partis majus, vel minus eſſet toto alterius partis contra ſuppoſitionem. Ergo prima ſuperficies cylindrica primæ ſuperficiei ſphęricæ æquatur.

Corollarium I.

In prædicta hypoth. ſuperficies cylindrica eſt dupla areæ circuli, qui illius baſis eſt, oſtenſum enim eſt, ut habeatur area circuli, ducendam eſſe dimidiam peripheriam in radium, & hic, ut habeatur ſuperficies cylindrica, ducendam eſſe totam peripheriam in radium, nam ſuperficies cylindrica intelligitur deſcripta a circumferentia, quæ radii longitudinem ſibimetipſi parallela percurrat. Ergo ſuperficies dimidiæ ſphæræ, quæ illi æqualis eſt, dupla eſt areæ circuli, qui ejus baſeos vicem gerit.

Corollarium II.

Superficies ſphæræ quadrupla eſt areæ maximi ejuſdem ſphæræ circuli, nam cùm dimidiæ ſphæræ ſuperficies maximi circuli areæ dupla ſit, totius ſphæræ ſuperficies ejuſdem circuli areæ quadrupla erit. Hæc eſt admiranda illa propoſitio, quam ejus inventor Archimedes tumulo ſuo inſcribi juſſit.

PROPOSITIO V

Si ab hemiſphęrio B O D auferatur ſegmentum A O C plano G H ad diametrum B D parallelo factum, ſoliditas

por-

portionis hemiſphæri reſidui B A C D æquatur duabus tertiis cylindri G B D H, unà cum ſoliditate coni A P C, cujus baſis eſt ille circulus, qui duo ſegmenta ſeparat. (fig 128.)

Quod ut demonſtretur, oſtendendum eſt, cupulam convexam P B A P D C eſſe duas tertias cylindri G B D H ejuſdem baſeos, & altitudinis. Ducantur diagonales P M, P N, & perpendiculares A E, C F, item lineæ P G, P H. In primis conus I P K æquatur portioni ſcutellæ G B A, H D C, cum quivis in cono circulus, ut oſtenſum jam eſt propoſ 3 hu lib æqualis ſit cuivis coronæ correſpondenti in ſcutella.

Si ergo conus I P K ſit tertia pars tubi G B E A, H D F C; etiam portio ſcutellæ G B A, H D C æquabitur tertiæ parti tubi ejuſdem; & conſequentet ſolidum mixtum B A E, D C F erit duæ tertiæ partes tubi. Tubi nomine intelligitur ſoliditas comprehenſa inter duas ſuperficies cylindricas, & concentricas lineis G B, A E; C F, D H; hoc eſt, ut aliter exprimatur, reſiduum cylindri G B D H, poſtquam ab illo demptus ſit interior cylindrus A E C F.

Oſtendere ergo oportet, tubum G B E A, H D F C triplum eſſe coni I P K, quod facile eſt, nam, ut habeantur eotum ſoliditates, eadem area ducatur in duas altitudines, quarum una tripla eſt alterius. Siquidem, ut habeatur tubi ſoliditas, corona G A, C H ducitur in altitudinem G B, ut autem habeatur ſoliditas coni I P K, area circuli I K, quę coronæ æqualis eſt, ducitur duntaxat in tertiam partem ejuſdem altitudinis G B. Ergo conus eſt tertia pars tubi. Ergo ſoliditas mixta B A E, D C F æquatur duabus tertiis tubi.

Conſideranda deinde eſt cupula E A P C F, quam paritet eſſe duas tertias cylindri A E F C, manifeſtum eſt. Ergo cupula hæc addita ſolido B A E, D C F eſt duæ tertiæ tubi, & cylindri A C E F, hoc eſt totius cylindri G L H B P D. atqui hæc cupula cum ſolido mixto conſtituit toram cupulam ſphæricam B A P C D. Ergo hæc cupula ſphærica eſt duæ tertiæ cylindri G H B D eandem baſim, & altitudinem habentis.

Rurſus ſi huic cupulæ ſphæricæ, cujus ſoliditas jam habetur, addatur ſoliditas coni A P C, habebitur ſoliditas ſegmenti ſphæricæ, quæ quæritur. Ergo totum ſegmentum dimidiæ ſphæræ habens pro baſi maximum circulum, æquatur duobus tertiis cylindri ejuſdem baſis, & altitudinis, unà cum cono ejuſdem altitudinis habente baſim circulum, qui ſegmentum efficit.

Co-

Corollarium.

Cupula ſphærica B A P C D æquatur ſecundum ſoliditatem cupulæ cylindricæ B G P H D, utraque enim eſt duæ tertiæ cylindri ejuſdem baſis, altitudiniſque.

PROPOSITIO VI.

Superficies cujuſvis portionis hemiſphærii æqualis eſt cylindricæ ſuperficiei cylindri eandem baſim, & altitudinem habentis. (fig. 129.)

Sint portio dimidiæ ſphæræ B Q P N M, cujus maximi circuli, qui ejus baſis eſt, diameter ſit linea B M N, & cylindrus B A O N ejuſdem baſis, & altitudinis. Erit ſuperficies cylindrica æqualis ſuperficiei ſphæricæ. Ducantur lineæ M A, M Q, M O, M P.

Probatur. Si a cylindro B A O N dematur conus A M O, ſupereſt cupula cylindrica B A M O N æqualis ſoliditate per corol. præced propoſ. cupulæ ſphæricæ B Q M P N, quæ eſt reſiduum ſegmenti propoſiti, ſi demator conus Q M P. Dividatur mente tam cupula cylindrica in infinitas ſuperficies cylindricas, & concentricas, ut A B, 1 C, 2 D, 3 E, 4 F, 5 G, 6 H, 7 I, 8 K, 9 L, quàm cupula ſphærica in infinitas portiones ſuperficietum ſphæricarum, & concentricarum, ut Q B, R C, S D, T E, V F, X G, Y H, Z I, + K, ++ L.

Clarum eſt, tot requiri cylindricas ſuperficies ad componendam cupulam cylindricam, quot ſuperficies ſphæricas ad efformandam ſoliditatem cupulæ ſphæricæ, nam numerum ſuperficierum tam cylindricarum, quàm ſphæricarum idem radius B M metitur. Si ergo prima ſuperficies cylindrica eſſet major, vel minor prima ſuperficie ſphærica, etiam ſecunda illius major, vel minor foret ſecunda hujus, & totalitas unius partis major, vel minor totalitate alterius partis; hoc eſt, ſoliditas cupulæ cylindricæ major, vel minor eſſet ſoliditate cupulæ ſphæricæ, quod eſt contra corol. præced propoſ. Ergo prima pars unius primæ alterius parti æquatur, hoc eſt, ſuperficies cylindrica A B O N æqualis eſt ſuperficiei ſphæricæ Q B N P. Quod erat oſtendendum.

De Solidorum Comparatione.

Sicuti pro planorum comparatione opus fuit ratione longitudinis ad longitudinem, & latitudinis ad latitudinem; ideoque recurrendum fuit ad rationem compositam ex duabus rationibus; ita cum comparandæ nunc sint tres dimensiones, necesse est, considereetur ratio composita ex tribus rationibus.

Definitiones.

Quotiescunque habentur tres rationes, ut ratio 1 ad 3, ratio 2 ad 7, & ratio 4 ad 5, quæ hoc modo disponendæ sunt, 1, 3. 2, 7. 4, 5; & tres termini antecedentes inter se ducuntur, sicuti & tres consequentes, habentur duo novi termini, ut 8, 105. Hi duo novi termini formant novam rationem, quę ratio composita ex tribus rationibus dicitur.

Si tres rationes componentes sunt æquales, ut 1, 2 3, 6 4, 8, ratio, quæ his tribus æqualibus rationibus componetur, ut 12, 96, dicetur ratio triplicata rationis 1 ad 2, seu 3 ad 6, vel 4 ad 8, quæ eadem est.

Diligenter cavendum; ne ratio triplicata cum ratione tripla confundatur, nam 12, & 96 sunt in ratione triplicata 1 ad 2; non autem in ratione tripla, hæc esset 12, & 72, qui numeri forent in ratione tripla 1 ad 2.

Considerentur nunc duo parallelepipeda, quorum primi basis sit rectangulum DC, & altitudo linea AB, secundi verò basis rectangulum GH, altitudo autem linea EF (*T* 13 *T* 14 *fig* 130.)

Certum est, ut habeatur primi parallelepipedi soliditas, ducendam esse prius lineam AD in AC pro basi, deinde hoc productum in altitudinem AB pro soliditate, hoc est, multiplicandæ sunt tres dimensiones inter se. Quod & in secundo parallelepipedo faciendum est.

Ergo si hæ tres primi parallelepipedi dimensiones ita disponantur, ut ex una parte singulæ sint antecedentes unius rationis, & ex alia reliquæ tres dimensiones secundi parallelepipedi singulæ sint consequentes alterius rationis, clarum est, rationem ex his tribus rationibus compositam esse idem, ac duo parallelepipeda, & consequenter horum habitudinem per illam exprimi.

Ut

Ut ſi ſint tres rationes (*fig.* 131) A D ad E G, C A ad E H, & A B ad E F; tres antecedentes A D, C A, A B, ſi inter ſe multiplicentur, exhibent primum parallelepipedum; & tres conſequentes E G, E H, E F ſecundum parallelepipedum.

Ex quo ſequitur, juxta noſtram definitionem, primum parallelepipedum eſſe ad ſecundum in ratione compoſita ex ratione lineæ A D ad lineam E G, ex ratione lineæ C A ad lineam E H, & ex ratione lineæ A B ad lineam E F, hoc eſt, ex rationibus longitudinis ad longitudinem, latitudinis ad latitudinem, & altitudinis ad altitudinem.

Si hæ tres rationes eſſent æquales, hoc eſt, ſi longitudo eſſet ad longitudinem, ut latitudo ad latitudinem, & altitudo ad altitudinem, hæc duo parallelepipeda dicerentur ſolida ſimilia, & forent inter ſe in triplicata ratione vel longitudinis unius ad longitudinem alterius, vel latitudinis ad latitudinem, vel altitudinis ad altitudinem.

Si ergo cognoſcatur, altitudinem, vel latitudinem, vel longitudinem unius ex his duobus ſolidis ſimilibus eſſe, puta, duplam altitudinis, vel latitudinis, vel longitudinis alterius, ut brevi habeatur habitudo, quæ reperitur inter illorum ſoliditates, ſatis eſt ſumere rationem triplicatam 2 ad 1, ut 2, 1 . 2, 1 . 2, 1, & ducere inter ſe tres antecedentes, ſicut & tres conſequentes, orietur enim ratio 8, 1, ex quo cognoſcetur, unum parallelepipedum ſimilium eſſe octuplum alterius. Hinc ſequentes efformantur propoſitiones.

PROPOSITIO VII.

Parallelepipeda ſunt in ratione compoſita ex rationibus latitudinis ad latitudinem, longitudinis ad longitudinem, & altitudinis ad altitudinem.

PROPOSITIO VIII.

Parallelepipeda ſimilia ſunt in triplicata ratione ſuarum dimenſionum homologarum. Hoc jam oſtenſum ſupra eſt.

PROPOSITIO IX.

Prismata triangularia sunt inter se, ut parallelepipeda, quorum sunt semisses. Hoc explicatione non indiget.

PROPOSITIO X.

Prismata triangularia similia sunt inter se in ratione triplicata suarum dimensionum homologarum. Hoc itidem demonstratum est.

Corollarium.

Omnia prismata similia pentagonalia, hexagonalia, &c. sunt inter se in ratione triplicata suarum dimensionum homologarum, possunt enim reduci in prismata triangularia.

PROPOSITIO XI.

Pyramides similes sunt inter se in ratione triplicata suarum dimensionum homologarum cùm enim sint tertia pars suorum prismatum, ipsæ quoque sunt inter se in eadem ratione.

PROPOSITIO XII.

Cylindri sunt inter se in ratione composita basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem; sunt enim prismata regularia infinitis constantia lateribus.

Corollarium I.

Cylindri similes, hoc est, quorum altitudines sunt inter se, ut radii, seu circumferentiæ basium, sunt inter se in ratione triplicata suarum dimensionum homologarum.

Corollarium II.

Coni similes sunt inter se in ratione triplicata suarum dimensionum homologarum; sunt enim in eadem ratione, qua cylindri, cùm illorum sint tertia pars.

Co-

Corollarium III.

Sphęræ ſunt inter ſe in ratione triplicata ſuorum radiorum; ſphęræ enim ſingulæ ſunt duæ tertiæ partes alicujus cylindri, & hi cylindri ſunt ſimiles; nam altitudo eſt ad altitudinem, ut diameter baſeos unius ad diametrum baſeos alterius, & ut circumferentia baſis ad circumferentiam baſis

Uno verbo, omnia corpora, ſeu ſolida ſimilia ejuſdem generis ſunt inter ſe in ratione triplicata ſuarum dimenſionum homologarum.

Itaque ſi dentur duæ glandes tormenti bellici, quarum unius radius duplus ſit radii alterius, facilè cognoſcitur, majoris ſoliditatem octuplam eſſe ſoliditatis minoris; nam oportet ſumere rationem triplicatam 1 ad 2 1, 2 1, 2 1 2
jam ex multiplicatione trium antecedentium habetur 1, & ex multiplicatione trium conſequentium habetur 8, ideoque habetur 1, 8 pro ratione triplicata rationis radiorum.

Hinc facilè explicabitur, cur pila major, proportione ſervata, longiùs tendat, quàm pila minor; nam ſi pila 8 librarum ſupponatur eadem celeritate moveri, qua pila 1 libræ, hæc illa octupio majorem motum habeat, neceſſe eſt, cùm enim habeat pondus octuplum illius, opus eſt vi octupla, ut eadem velocitate moveatur.

Verùm, licèt ejus pondus ſit octuplum, tamen ejus ſuperficies non eſt, niſi quadrupla ſuperficiei minoris pilæ ex 2 coroll propoſ 4. hu lib. nam hæ duæ ſuperficies ſunt inter ſe, ut areæ maximorum circulorum, hæ autem areæ ſunt inter ſe in ratione duplicata radiorum, hoc eſt, ut 1. 4.

Atqui corpora, quæ moventur, non amittunt de ſuo motu, niſi ſecundum proportionem ejus motus, quem communicant iis, quæ ipſa circumdant, & hunc motum non communicant, niſi ſecundum proportionem ſuarum ſuperficierum.

Si ergo pila 8 librarum ſupponatur, quòd momento temporis amittat quatuor gradus motus ex octo, quos habet, parva pila, cujus ſuperficies eſt quarta pars majoris ſuperficiei, amittet eodem tempore unum gradum motus, hoc eſt totum, quem habebat. Itaque, cùm hæc totum ſuum motum jam amiſerit, illa adhuc ſemiſſem ejus retinet, quem habebat, dum moveri cœpit.

Rur-

Rurſus, ut ad uſum reducantur, quæ de ſolidis nunc dicta ſunt; conſideretur globus Terreſtris. Hujus globi maximi circuli circumferentia continet 9000 leucas, hoc eſt, 25 leucas per ſingulos gradus, juxta obſervationes Aſtronomicas.

Jam circuli circumferentia eſt ad ſuam diametrum, ut 22 ad 7 circiter, ſecundum proportionem traditam ab Archimede, in qua, quantum ad praxim, conſiſtendum eſt, licèt magis magiſque attingi præciſio poſſit, nunquam tamen perfecte haberi.

Ergo radius terræ eſt circiter 1431 leucarum. Si itaque 4500 leucæ, ſemiſſis nempe circumferentiæ, ducantur in 1431 leucas, hoc eſt in radium, habebitur productum 6439500 leucarum pro area circuli maximi.

Quadruplum hujus producti, quod eſt 25758000 leucæ, erit ſuperficies globi terreſtris per coroll. 2. propoſ. 4. hu. lib.

Quòd ſi quæratur ejus ſoliditas, ducta area maximi circuli 6439500 leucarum in diametrum 2863 leucarum, proveniet 18436288500 leucæ, quæ ſunt ſoliditas cylindri ejuſdem baſis, & altitudinis.

Accipiantur duę tertię partes hujus ſummę, hoc eſt 12290859000 leucæ, erunt hæ ſoliditas globi terreſtris ex propoſ. 3. hu. lib.

Quòd ſi conferatur globus terreſtris cum Solari, cujus radius centuplò major eſt, quàm radius terræ; jam ſcitur, eorum ſuperficies eſſe in ratione duplicata ſuorum radiorum atqui ratio duplicata 1 ad 100 eſt 1 ad 10000. Ergo ſuperficies Solis eſt decies millecupla ſuperficiei terræ; ac proinde continet 257580000000 leucas.

Scitur quoque, eorum ſolliditates eſſe in triplicata ratione ſuorum radiorum; atqui ratio triplicata 1 ad 100 eſt 1 ad 1000000. Ergo ſoliditas Solis excedit millione terræ ſoliditatem, & per conſequens continet 12290859000000000 leucas.

Admonitio.

Oſtenſum jam ſupra eſt, cujuſnam utilitatis ſit Geometria diviſibilium pro ſolidorum demonſtratione. Cupientibus majora hujus facultatis arcana perſcrutari, nullum, opinor, tædium afferent ſequentes propoſitiones, quæ campum latiſſimum aperiunt, ad altiſſimas Geometriæ veritates aſſequendas.

Ut id, quod ſequitur, clarè intelligatur, memoria recolendum eſt, ſuperficies conſiderari, tanquam lineis parallelis compoſi-

poſitas, & ſolida, tanquam ſuperficiebus parallelis conſtantia.

Ut dum conſideratur rectangulum ABCD, (*fig.* 132.) ſupponitur illud componi tot lineis parallelis lateri CD, quot puncta reperiuntur in linea AC. Quæ ſuppoſitio non poteſt non eſſe vera; nam ſi intelligatur linea CD moveri ſibimetipſi parallela, ut perveniat ad punctum A, percurret omnia puncta lineæ AC, deſcribetque ſuperficiem rectanguli.

Hæc linea CD, omneſque aliæ illi parallelæ, quæ rectanguli replent ſuperficiem, appellantur figuræ elementa, quæ omnia inter ſe æquantur.

Si pro rectangulo conſideres triangulum BDC, concipere poteſ, ejus ſuperficiem repleri baſi CD mota ſibiipſi parallela uſque ad punctum B: verùm quo magis baſis CD accedit ad punctum B, eo magis de ſua longitudine amittit; ita ut trianguli ſuperficies impleta ſit parallelis ſingulis inter ſe inæqualibus, quæ interim elementa trianguli dicuntur.

Jam manifeſtum eſt, cùm tot puncta in linea BD, quot in linea AC, ſint, totidem elementa, ſeu parallelas reperiri in rectangulo, quot in triangulo; verùm trianguli elementa ſemper decreſcunt; ideoque mirandum non eſt, ſi ejus ſuperficies minor ſit ſuperficie rectanguli, cujus elementa minimè decreſcunt.

Eodem modo conſiderare licet parallelepipedum rectangulum, tanquam compoſitum infinitis rectangulis parallelis, vel tanquam formatum rectangulo, quod ejus eſt baſis, ſibiipſi parallelo moro per ſingula puncta altitudinis parallelepipedi. Tum omnia hæc rectangula parallela nominantur elementa parallelepipedi, ſuntque omnia inter ſe æqualia.

Verùm ſi conſideranda ſit pyramis ejuſdem cum parallelepipedo baſis, & altitudinis; ut hæc concipiatur tanquam compoſita baſi, quæ ſibimetipſi parallela per ſingula altitudinis puncta moveatur, concipienda eſt hæc baſis ſemper decreſcere eo magis, quo pyramidis vertici ſit proximior; ſicque omnia illa rectangula parallela, quæ ejus ſoliditatem formant, eandem revera efficiunt ſummam, quam rectangula parallelepipedi; cùm eadem ſit altitudo: ſed cum illa ſemper decreſcant, ideo ſoliditas pyramidis minor eſſe debet ſoliditate parallelepipedi. Hæc rectangula decreſcentia ſecundum certam proportionem, appellantur elementa pyramidis.

Pari ratione infinitæ ſuperficies ſphæricæ, quæ globi, ſeu

ſphæ-

ſphæræ ſoliditatem componunt, quæque per omnia puncta radii ſphęræ tranſire, & ſemper minui uſque ad centrum, ſupponuntur, dicentur ſphęræ elementa. Has conſiderationes & cylindris, & conis, & priſmatibus applicare facile eſt.

PROPOSITIO.

Si dentur duæ figuræ, duo ſolida, uno verbo, duæ magnitudines homogeneæ, quæ inter ſe conferri debeant, habeantque eandem altitudinem; decreſcentibus verò ſemper elementis unius in eadem ratione, qua altitudines, alterius elementa minimè decreſcant; figura, ſeu ſolidum, cujus elementa non decreſcunt, duplum erit figuræ, ſeu ſolidi, cujus elementa decreſcunt in eadem ratione, qua altitudines. (fig. 133.)

Sit rectangulum AD, cujus elementa ſint CD, LF, GI æqualia inter ſe, ſicut & reliqua omnia, quæ ſupponuntur transire per ſingula puncta altitudinis AC.

Sit triangulum BDC, cujus altitudo BD æquetur altitudini CA rectanguli AD. Ejus elementa ſint CD, EF, HI. Manifeſtum eſt, elementum CD ita eſſe ad elementum EF, ut altitudo BD eſt ad altitudinem BF; & elementum CD eſſe ad elementum HI, ut altitudo BD eſt ad altitudinem BI; ideoque patet, trianguli elementa decreſcere in eadem ratione, qua altitudines.

Quibus poſitis. Rectangulum eſt duplum trianguli: licèt hoc per ſe pateat, placuit tamen hìc apponere demonſtrationem univerſalem per ordinem ad elementorum proportionem.

Sumatur linea BI par lineę CL, ducanturque lineæ GI, LF. Triangula BIH, CLE ob parallelas ſunt ſimilia. Ergo propter æqualitatem linearum CL, BI, linea HI lineæ LE æquatur. Ergo duæ lineæ ſimul ſumptæ, ſeu duo elementa trianguli, ut EF, HI æquantur uni elemento LF rectanguli, quod de quibuſcunque duobus aliis trianguli elementis æquè a punctis D, & B diſtantibus oſtendetur. Quare cùm tot lineæ parallelæ inſint in trianguli ſuperficie, quot in ſuperficie rectanguli, ob altitudinum æqualitatem, & opus ſint duæ lineæ trianguli, ut uni rectanguli æquentur; omnes lineæ trianguli ſimul ſumptæ

ptæ non æquivalebunt, niſi ſemiſſi omnium linearum rectanguli ſimul ſumptarum; & cùm hæ lineæ ſimul ſumptæ non differant a ſuperficiebus, ſequitur, ſuperficiem rectanguli duplam eſſe ſuperficiei trianguli.

Quod aliter quoque oſtendi poteſt ex proprietate progreſſionis Arithmeticæ. Jam notum eſt, in progreſſione arithmetica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. vel in quavis alia 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c ſi accipiantur duo termini æquè a medio diſtantes, horum ſummam æquari ſummæ duorum aliorum terminorum æqualiter ab eodem medio diſtantium. In prima progreſſione 1, 7 æquè diſtant a medio 4; ſimiliter 2, 6 ab eodem medio 4 æqualiter diſtant; patet autem, ſummam duorum primorum, ſcilicet 8, æquari ſummæ duorum reliquorum, ſcilicet 8; quod ſemper in quacumque alia progreſſione arithmetica eveniet.

Quibus poſitis: ſi concipiatur linea B D altitudo magnitudinum, quæ comparandæ ſunt, in quot placuerit æquales partes diviſa; quo magis baſis C D aſcender verſus verticem B, eo magis altitudo decreſcet juxta progreſſionem arithmeticam, hoc eſt, diminutio ſemper fiet per partes æquales.

Cùm autem elementa trianguli proportionalia ſint altitudinibus, ipſa quoque conſequenter decreſcent in progreſſione arithmetica. Ut ſi altitudo B F collata cum altitudine B D diminuta ſit, puta una quarta parte; elementum quoque E F collatum cum elemento C D diminutum erit una quarta parte.

Atqui in ſuppoſita figura primus progreſſionis terminus eſt baſis C D, ultimus punctum B, ſeu, ut rectiùs dicatur, zero, qui termini æquè diſtant a medio M, N. Ergo duo termini quicunque progreſſionis, ſeu duo elementa quæcunque trianguli, æquè a medio diſtantia ſimul ſumpta æquantur baſi C D & ſicuti rectangulum totidem continet lineas æquales lineæ C D, quot termini, ſeu elementa inſunt in triangulo, ita evidenter ſequitur, omnes lineas, ut C D, ſimul ſumptas, hoc eſt, ſuperficiem rectanguli, duplas eſſe omnium linearum trianguli ſimul ſumptarum, hoc eſt, ejus ſuperficici. Demonſtratio hæc generalis eſt.

Corollarium I.

Superficies cylindrica, cujus altitudo æquatur radio circuli, qui ejus baſis eſt, dupla eſt areæ ejuſdem circuli.

Superficies cylindrica continet tot circumferentias æquales

circumferentiæ baſis, quot puncta habet ejus altitudo, ſeu radius ejuſdem baſeos; concipitur enim efformari ab eadem baſi ſibiipſi parallela mota per ſingula altitudinis puncta; ſicque elementa ſuperficiei cylindricæ minimè decreſcunt.

Area circuli, qui baſis eſt, componitur tot circumferentiis concentricis, quot punctis radius conſtat, ſicque circuli area parem elementorum numerum habet, ac ſuperficies cylindrica.

Verùm hæ circumferentiæ concentricæ, quò magis accedunt ad centrum, eo magis arithmeticè decreſcunt, hoc eſt per partes æquales, & in eadem ratione, qua earum radii; nam omnes hæ circumferentiæ ſunt inter ſe, ut ipſarum radii. Ergo per hanc propoſit. omnia elementa ſuperficiei cylindricæ ſimul ſumpta dupla ſunt omnium elementorum areæ circuli ſimul ſumptorum. Quare ſuperficies cylindrica dupla eſt areæ circuli, qui ejuſdem baſis eſt.

Corollarium II.

Fuſum parabolicum eſt ſemiſſis cylindri ejuſdem baſis, & altitudinis. (*fig.* 134.)

Quanquam propoſitio hæc elementaris non eſt, viſum tamen eſt, eam non eſſe omittendam, ut magis magiſque appareat uſus immenſus horum indiviſibilium.

Parabola apud Geometras dicitur quædam ſpecies lineæ curvæ, ut C E F B, quæ ſupponitur ſequentem habere proprietatem: nimirum ducta linea D B, quæ perpendiculariter inſiſtat puncto B curvæ, quæ axis parabolæ dicitur, ſi a duobus quibuſque punctis parabolæ, ut E, F ducantur duæ perpendiculares E H, F G ad axem, quadratum lineæ E H eſt ad quadratum lineæ F G, ut portio axis B H eſt ad portionem B G. Hac proprietate ſupponitur conſtitui natura parabolæ.

Compleatur rectangulum A D, in cujus area deſcripta eſt parabola C E F B: ſi ſupponatur rectangulum A D circumagi circa axem immotum B D, deſcribet cylindrum habentem altitudinem B D, & baſim circulum, cujus radius C D.

Similiter eo tempore parabola circumacta circa eundem immotum axem deſcribet ſolidum terminatum in puncto, ſeu vertice B, cujus baſis erit idem cylindri circulus; & hoc eſt, quod Fuſum parabolicum nominatur.

Qui-

Quibus poſitis : ſoliditas hujus ſuſi eſt ſemiſſis ſoliditatis cylindri.

Soliditas cylindri continet tot circulos parallelos baſi, quot habet puncta linea B D; ſicque elementa cylindri non decreſcunt.

Soliditas ſuſi tot tenet circulos baſi parallelos, quot numerat puncta eadem linea B D; ideoque pari numero inſunt circuli, ſeu elementa in ſuſo, ac in cylindro. Verùm circuli, ſeu elementa ſuſi ſemper decreſcunt. Quare videndum tantùm eſt, num decreſcant in eadem ratione, qua altitudines; hoc enim ſi ſit, erunt per hanc propoſ. ſemiſſis omnium circulorum cylindri ſimul ſumptorum, qui minimè decreſcunt.

Examinetur ergo in ſuſo circulus, cujus radius E H, conferaturque cum circulo, cujus radius F G.

Jam aliunde habetur, circulos eſſe inter ſe, ut quadrata ſuorum radiorum. Ergo circulus, cujus radius E H, eſt ad circulum, cujus radius F G, ut quadratum lineæ E H ad quadratum lineæ F G.

Atqui ex hypoth. juxta proprietatem Parabolæ, quadratum lineæ E H eſt ad quadratum lineæ F G, ut altitudo B H ad altitudinem B G.

Ergo circulus, cujus radius E H, eſt ad circulum, cujus radius F G, ut altitudo B H ad altitudinem B G.

Ergo circuli, ſeu elementa, quæ ſuſum componunt, decreſcunt in eadem ratione, qua altitudines. Quare ſuſum paraboli cum eſt ſemiſſis cylindri.

Clarum eſt, ſpeciem illam infundibuli, quæ ſupereſt, demptо ſuſo a ſoliditate cylindri, æquari huic ſuſo; nam ſuſum eſt ſemiſſis cylindri: & ſicut hæc ſolida habent eandem altitudinem, ſuſum quidem lineam B D, infundibulum verò lineam C A, ita eundem elementorum numerum utrumque continet, ex quo, ſine alia demonſtratione, ſequitur, coronam, cujus latitudo eſt linea I E, quæ ſupponitur æquè diſtare a baſi infundibuli A B, ac linea F G diſtat a baſi ſuſi C D, æquari circulo, cujus diameter F G, nam hic circulus eſt elementum ſuſi correſpondens coronæ pari elementо infundibuli.

Hactenus conſideratæ ſunt magnitudines, quarum elementa decreſcunt in eadem ratione, qua altitudines; verùm conſiderari etiam poſſunt elementa, quæ decreſcunt in ratione duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. altitudinum, hæ enim ſpecula-

culationes nullis circumſcribuntur terminis.

Examinanda ſit nunc habitudo, quam habet ſumma elementorum hujuſmodi ad ſummam elementorum, quę non decreſcunt. (*fig.* 135)

Supponatur rectangulum A D diviſum in duo triangula diagonali B C; lineæ C D, T N, R M, P O, A B ſint elementa rectanguli; lineę verò C D, G N, F M, E O ſint elementa trianguli elementis rectanguli correſpondentia. Jam oſtenſum eſt, hęc arithmeticè decreſcere, hoc eſt, C D eſſe ad G N, ut B D ad B N, & C D ad F M, ut B D ad B M, & C D ad E O, ut B D ad B O

Si itaque duabus lineis C D, G N quęratur tertia proportionalis, ut H N, hoc eſt, ſi fiat, ut C D ad G N, ita G N ad tertiam lineam, quę ſit H N; manifeſtum eſt ex iis, quæ oſtenſa ſunt in proportionibus, lineas C D, H N eſſe in ratione duplicata rationis C D ad G N, ſeu B D ad B N; ſicque linea N H decreſcet reſpectu lineæ C D in ratione duplicata altitudinum B N, B D.

Idipſum fiat reſpectu omnium aliorum elementorum trianguli, hoc eſt lineis C D, F M quæratur tertia proportionalis, quę ſit L M; lineis C D, E O tertia proportionalis I O, & ſic deinceps. Per ſingula puncta, ut H, L, I ducatur curva C H L I B, quæ contineat ſpacium mixtum C H L I B D, cujus elementa decreſcunt in ratione duplicata altitudinum.

Quòd ſi quęreretur ſpacium, cujus elementa decreſcerent in ratione triplicata altitudinum, invenienda tantùm eſſet quarta proportionalis lineis C D, G N, H N; item lineis C D, F M, L M; pariter lineis C D, E O, I O, &c. & per ſingula puncta determinata ab his quartis proportionalibus ducenda curva, & ſic deinceps. His poſitis ſit.

PROPOSITIO.

SI dentur duæ figuræ, duo ſolida, uno verbo, duæ magnitudines homogeneæ, quæ inter ſe comparari debeant, habeantque eandem altitudinem, decreſcentibus verò elementis unius in ratione duplicata rationis altitudinum, alterius elementa non decreſcant; figura, ſeu ſolidum, cujus elementa non decreſcunt, erit triplum illius, cujus elementa decreſcunt.

De-

Demonſtratio geometrica, quę communiter afferri ſolet, valde confuſa eſt; ideoque probatur idipſum demonſtratione arithmetica, quę omnium captui magis eſt accommodata.

Supponantur duę figuræ ejuſdem altitudinis; dividaturque hęc altitudo, puta in viginti partes ęquales; numeri 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, qui decreſcunt arithmeticè, exhibeant altitudines decreſcentes figuræ.

Ut una ex his figuris habeat ſua elementa decreſcentia in ratione duplicata altitudinum, ſumendi ſunt numeri quadrati eorundem numerorum, ſcilicet 400, 361, 324, 289, 256, 225, 196, 169, 144, 121, 100, 81, 64, 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1, 0, quorum ſumma eſt 2870.

Reſpectu autem figuræ, cujus elementa non decreſcunt, toties ſumendus eſt numerus quadratus 400 maximi numeri 20, qui eſt elementum baſis, quot ſunt elementa decreſcentia in ratione duplicata, hoc eſt 21 vicibus; ſumma horum elementorum non decreſcentium erit 8400.

Numerus 8400 exhibet ergo figuram, cujus elementa non decreſcunt, & numerus 2870 figuram, cujus elementa decreſcunt in ratione duplicata altitudinum.

Atqui numerus 2870 eſt paullo major, quàm tertia pars numeri 8400; nam ejus triplus numerus eſt 8610, qui excedit numerum 8400 numero 210; hoc eſt, quòd in hoc exemplo figura decreſcens excedit tertiam totalis partem 120.ᵐᵉ parte totalis figuræ, quod parvum admodum eſt.

Verùm ſi pro diviſione altitudinis in 20 partes ęquales ſumatur diviſio in 100 partes æquales, ſerventurque eadem, quæ ſupra in diviſione 20 partium, proximior multo habebitur veræ præciſioni operatio, nam ſumma quadratorum a numero 100, uſque ad numerum 1 incluſivè, eſt 338350, ſumma autem maximi elementi, quod eſt 10000, ſumpta centum, & una vicibus, eſt 1010000, ſicque figura, cujus elementa decreſcunt, non excedit tertiam partem figuræ totalis, niſi numero 1683, hoc eſt ſexcenteſima parte figurę totalis. Quòd ſi altitudo dividatur in 1000000 partes æquales, iiſdem ſervatis, figura decreſcens non excedet tertiam partem figuræ totalis, niſi ſex millemilleſima parte totalis figuræ: ſicque ſi altitudo dividatur in plures pluresque partes, hæc differentia evadet minor quacunque quantitate data. Ex quo colligitur, perfectam æqualitatem inter figuram decreſcentem, & tertiam partem totalis dari, ſi numerus

ele-

elementorum ſupponatur indefinitus, uti revera eſt.

Eadem methodo utendum erit, ut oſtendatur, ſi elementa decreſcentia ſunt in triplicata ratione altitudinum, figuram decreſcentem eſſe quartam partem figuræ non decreſcentis.

Quòd ſi elementa decreſcant in ratione quadruplicata altitudinum, figuta decreſcens erit quinta pars figuræ non decreſcentis, & ſic in infinitum. En igitur quàm magnus campus hujuſmodi conſiderationibus pateat.

Corollarium I.

Conus eſt tertia pats cylindti ejuſdem baſis, & altitudinis. Nam elementa cylindri minimè decreſcunt; elementa verò coni, quę ſunt circuli parallelı, eam inter ſe rationem habent, quam quadrata ſuorum radiorum; cùm autem hi radıi ſint inter ſe, ut altitudines, quadtata radiorum ſunt in ratione duplicata altitudinum Ergo hi circuli, ſcu elementa decreſcunt in ratione duplicata altitudinum. Ergo eorum ſumma totalis, quæ eſt coni ſoliditas, eſt tertia pars ſoliditatis cylindri.

Idem evidenter ſequitur de pyramide reſpectu priſmatis ejuſdem baſis, & altitudinis.

Corollarium II.

Si figura præcedens (*fig.* 135.) ſupponatur circumagi circa axem immotum B D, tectangulum A B C D deſcribet cylindrum; curva verò C H L I B deſcribet ſpeciem quandam coni concavi. Hujus coni ſoliditas erit quinta pars ſoliditatis cylindri.

Quod ut oſtendatur, ſufficit demonſtrate, coni elementa decreſcere in ratione quadtuplicata altitudinum. Hoc autem facile eſt; nam cùm conus habeat elementa circulos parallelos, accipiantur duo ex his circulis, quorum radıı v. g. C D, L M. Hi circuli ſunt inter ſe in ratione duplicata linearum C D, L M, quæ per naturam curvæ juxta conſtructionem ipſæ quoque ſunt in ratione duplicata altitudinum B D, B M. Jam verò duplicata ratio rationis duplicatæ eſt ratio quadruplicata, ut ratio duplicata 1 ad 2, eſt 1 ad 4, & ratio duplicata 1 ad 4, eſt 1 ad 16, quæ eſt quadruplicata 1 ad 2. Ergo circuli, qui habent radios lineas C D, L M, ſunt in ratione quadruplicata altitudinum B D, B M; quod & de ſingulis aliis elementis oſtendetur.

detur. Igitur eorum totalis ſumma, quæ eſt conus concavus, eſt quinta pars cylindri, cujus elementa non decreſcunt.

Corollarium III.

Datis quadrato A B C D, diagonali A D, & circuli quadrante C E B; ſi circumducatur figura circa axem immotum B D, linea A D deſcribet conum; latera C A, A B, & quadrans circuli deſcribent quandam ſpeciem ſcutellę: Hæc ſcutella æqualis erit cono. (*fig.* 136.)

Nam ſcutella, & conus habent eandem baſim, ſcilicet circulum, cujus radius A B; inſuper eandem habent altitudinem, ſcilicet lineas A C, B D; ideoque ſatis eſt oſtendere, omnia eorum elementa ſingula ſinguhs æquari, ut v. g. coronam, cujus latitudo H E, æquari circulo, cujus radius F G, quo nihil facilius.

Nam ptopter triangulum rectangulum E G D, ſi a quadrato E D, ſeu H G illi æquali, dematur quadratum E G, reſtat quadratum D G, ſeu F G illi æquale; hoc eſt, ſi a quadrato H G dematur quadratum E G, reſtat quadratum F G.

Atqui circuli ſunt inter ſe, ut quadrata radiorum. Ergo ſi a circulo, cujus tadius H G, auferatur circulus, cujus radius E G, habebitur reſiduus circulus, cujus radius F G.

Et conſequenrer cùm corona, cujus latitudo H E, nihil aliud ſit, quàm hoc reſiduum; cùm a circulo, cujus radius H G, ablatus fuerit circulus, cujus radius E G, ipſa corona manifeſtè æquabitur circulo, cujus radius F G. Quod de quibuſcunque aliis elementis oſtendetur. Quare ſcutella æquatur cono, qui per coroll. 1. hu propoſ. eſt tertia pars cylindri. Igitur ipſa etiam ſcutella eſt tertia pars cylindri geniti ex revolutione quadrati A B C D. Ex quo ſequitur, hemiſphærium factum ex revolutione quadrantis circuli C E B circa axem B D eſſe quoad ſoliditatem duas tertias ſoliditatis cylindri. Hinc conſtat, quomodo variis viis ad eaſdem veritates pervenire poſſimus.

Illud libenter prætereo, quod ex his principiis facilè colligi poteſt, ſuperficiem hemiſphærii æquari ſuperficiei cylindricę ejuſdem baſeos, altitudinisque, & conum æquilaterum eſſe ad ſphęram inſcriptam quantum ad ſoliditatem, ut 9 ad 4, &c. Hæc principia ita ſecunda ſunt, ut ex iis, quæ hinc deducuntur,

rur, plura volumina componi poſſint. Sufficiat oſtendiſſe methodum, quibus ingenium exercere placuerit.

Verùm, ut hic apponantur elementa præcipuarum rationum, quæ inventæ ſunt pro menſurandis magnitudinibus, & præcipuè ſolidis; pauca quædam dicenda ſunt de pervulgata inventione P. Guildini e Societ. JESU circa admirabilem proprietatem centri gravitatis.

Appellatur centrum gravitatis quantitatis cujuſcunque, ſive linea, ſive ſuperficies, ſive ſolidum ſit, punctum in ipſa quantitate, circa quod omnes partes ejus quantitatis ſunt in æquilibrio perfecto. ut ſi ſuperficies quadrata inſiſtat cuſpidi acus, unum tantùm punctum eſt in tota hac ſuperficie, ubi in neutram poſſit partem inclinare, punctum hoc dicitur centrum gravitatis.

Similiter centrum gravitatis lineæ rectæ eſt punctum in medio lineæ, per quod ſi ſuſpendi ſupponatur, in neutram partem inclinaret.

At enim non ſemper facile eſt gravitatis centrum cujuſvis magnitudinis geometrice invenire. Sed dantur infinitæ operationes, quibus facillimè invenire illud poſſis. En methodus, qua Ille utebatur. (*Tab. 15. fig. 137.*)

Sit ſuperficies rectangula B C D E, cujus centrum gravitatis A. rectangulum hoc circulariter actum circa axem immotum B D deſcribet cylindrum, & centrum gravitatis A deſcribet circulum M N A O, cujus radius A I. Circumferentiam hujus circuli appellat P. Guildinus viam circulationis centri gravitatis, ſeu breviùs viam circulationis.

Demonſtrat Ille, ſi ſumatur linea recta æqualis viæ circulationis pro altitudine parallelepipedi, cujus baſis ſit rectangulum B C D E, hoc parallelepipedum æquari cylindro.

Oſtendit ſimiliter, eùm linea G P deſcribat ſuperficiem cylindricam, & punctum F centrum gravitatis hujus lineæ deſcribat circulum F H L O, ſi accipiatur linea recta æqualis huic circumferentiæ, fiatque unà cum linea G P rectangulum, hoc rectangulum fore æquale ſuperficiei cylindricæ.

Qui voluerint hanc methodum ſequi, facilè percipient ejus immenſam fecunditatem, non ſolùm ad menſurandas omnes ſuperficies, & ſolida ordinaria, ſed etiam ad menſuranda infinita illa, in quibus reſiquæ methodi plerumque hærent. Sufficiat indicaſſe præclarum hoc principium, cujus, ſi placeat, am-

ampliſſima explicatio in Curſu Mathematico Patris de Chalſes videri poterit. Vſumque eſt, uno hìc tantùm exemplo ſpecimen dare.

Sit dimidia circumferentia A D C, (*fig.* 138.) cujus diameter A C, & radius B D eam ſecans bifariam in puncto D: ſi hæc moveatur circulariter circa axem immotum A C, deſcribet ſuperficiem ſphæricam. Hęc ſuperficies erit quadrupla areæ circuli, cujus diameter A C, vel I D.

In primis quærendum eſt centrum gravitatis dimidiæ circumferentiæ A D C, quod neutiquam eſſe punctum D putandum eſt: ſi enim concipiatur hæc dimidia circumferentia impoſita cuſpidi acus, qui ſit perpendicularis horizonti, ita ut ipſa quoque dimidia circumferentia ſit parallela ad eundem horizontem, facilè concipitur, quod hæc in tali ſitu perſiſtere non poterit, ſed ejus extremitatibus A, C deſcendentibus, ipſa quoque in gyrum movebitur ſuper punctum immotum D. Illud ergo, quod dicitur punctum gravitatis hujus dimidiæ circumferentiæ, eſt punctum v. g. E in radio B D, ita ut, ſuppoſito radio B D gravitate carere, ſi punctum E inſiſtat cuſpidi acus perpendicularis ad horizontem, dimidia circumferentia in neutram inclinans partem perſeverabit horizonti parallela. Jam in Statica oſtenditur, ut habeatur centrum gravitatis, ſeu linea B E, inveniendam eſſe tertiam proportionalem quadranti circuli A D, & radio B D; hoc eſt, ut quadrans circuli A D eſt ad radium B D, ita B D ad B E. Quibus poſitis

Sit dimidia circumferentia A D C 44 partes. Ob proportionem Archimedæam Diameter I D erit 28. Semidiameter B D 14. Quadrans circuli A D 22.

Fiat ergo 22. 14. : 14. 8 + $\frac{8}{11}$, ſcilicet lin. B E. Hęc linea B E, ſecundum ſupradicta, eſt radius viæ circulationis E H F G. Ut habeatur hæc via, ſeu circumferentia, fiat ſecundum Archimedem 7. 22 : : 16 + $\frac{2}{7}$. (hoc eſt diameter) 56, hoc eſt, valor. viæ circulationis.

Juxta principium P. Guldini, duco viam circulationis EHFG 56 in dimidiam circumferentiam A D C 44, & habetur productum 2464, quod debet eſſe valor ſuperficiei ſphæricæ, quam quadruplam eſſe areæ circuli A D C I, oſtendendum eſt.

Ut habeatur area circuli, multiplicanda eſt ejus dimidia circumferentia A D C 44 per ſemidiametrum B D 14; ex hac multiplicatione habetur productum valoris areæ 616, cujus

quadruplum præcisè est 2464. Quod erat demonstrandum.

Quòd si loco dimidiæ circumferentiæ A D C consideretur semicirculus A B C D A tanquam circumactus circa axem immotum A C, ejus superficies describet sphæram, cujus soliditas erit duæ tertiæ partis soliditatis cylindri habentis pro basi maximum sphæræ circulum, & pro altitudine ejus diametrum.

Nam ducta dimidia circumferentia 44 in radium 14, provenit valor areæ circuli 616, qui ductus in diametrum 28, exhibet soliditatem cylindri 17248, cujus duæ tertiæ partes sunt $11498 \frac{2}{3}$.

Jam ex principiis Staticæ, ut habeatur centrum gravitatis M areæ semicirculi, dividenda est linea B E in tres partes, & ex illis duæ sumendæ, quæ centro B sunt proximiores; sicque linea B M erit duæ tertiæ partes ex $8 \frac{2}{3}$, hoc est $\frac{2}{3}\frac{6}{3}$, & duplicando $\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{2}{3}$, habebitur diameter viæ circulationis, quæ erit $\frac{3}{3}\frac{6}{3}\frac{2}{3}\frac{4}{3}$. Ducta ergo area dimidiæ circumferentiæ 308, juxta principia P. Guldini, in $\frac{3}{3}\frac{6}{3}\frac{2}{3}\frac{4}{3}$ productum habetur $11498 \frac{2}{3}$, quod est præcisè sphęræ soliditas. Ex hoc exemplo cognosci potest, qua facilitate solvatur hoc admirabile Problema, cujus inventio Magno Archimedi immortale nomen peperit.

TRIGONOMETRIA.

TRigonometriæ nomine non solùm intelligitur mensura cujusvis trianguli propositi; verùm etiam plures aliæ operationes, quæ triangulorum ope fiunt, quæque plurimum conferunt ad infinitas magnitudines commensurandas. Quæ in Elementis dicta sunt, tantam facilitatem exhibent, ut, exceptis perpaucis propositionibus apponendis, ea tantùm hìc memoria repetere sufficiat.

PROPOSITIO I.

COgnitis in triangulo duobus angulis, & uno latere, vel duobus lateribus, & uno angulo, reliqua omnia cognoscuntur.

In primis enim cognitis duobus angulis, cognoscitur etiam tertius, cùm tres illi simul sumpti æquivaleant duobus rectis.

Jam

jam tribus angulis, & uno latere cognitis, habentur reliqua duó latera: nam per prop. 9 lib. 8. ut ſinus anguli oppoſiti lateri cognito eſt ad idem latus, ita ſinus alterutrius angulorum ad latus illi oppoſitum. Modus autem cognoſcendi ſinum cujuſvis dati anguli traderur infra. Ergo, cognitis duobus angulis, & uno latere, cognoſcuntur reliqua omnia.

Deinde cognitis duobus trianguli lateribus, & uno angulo, cognoſcetur etiam tertium latus, & reliqui duo anguli: nam datus angulus, vel erit oppoſitus alterutri laterum cognitorum, vel non. ſi ſit oppoſitus, hæc erit adhibenda analogia. ut latus cognitum ad ſinum anguli ipſi oppoſiti, ita aliud latus cognitum ad ſinum anguli ipſi oppoſiti, ideoque cognoſcetur hic ſecundus ſinus, & conſequenter ejus angulus. Quare habebuntur duo anguli cogniti, ex quorum cognitione etiam tertius innoteſcet, & conſequenter cognoſcetur etiam tertium latus.

Si autem angulus datus non ſit oppoſitus, ſed contentus duobus lateribus datis, is erit vel rectus, vel acutus, vel obtuſus.

Si rectus, ſufficit, tantùm ſummam quadratorum laterum cognitorum capere; erit hæc æqualis quadrato baſeos: extracta itaque hujus ſummæ radice quadrata, habebitur baſis, & conſequenter reliqui duo anguli.

Si verò ſit acutus, ut C A D, (*fig.* 1. *Tab.* 15.) & latera cognita ſint C A, A D; ab extremitate C demiſſa perpendicularis C B efficiet triangulum rectangulum A B C, cujus cognoſcuntur omnes tres anguli, & latus A C, & conſequenter cognoſcentur latus A B, & perpendicularis C B.

Ablato itaque latere A B ex latere A D jam dato, teſtat latus B D, quod paritet cognitum erit.

Cùm autem triangulum C B D rectangulum ſit, habeanturq; angulus rectus B, & duo latera B C, B D, facili negocio baſis quoque C D habebitur; cùm ejus quadratum reliquorum laterum quadratis æquetur. Itaque jam cognoſcuntur tria latera, & unus angulus trianguli C A D. Ergo facilè habebuntut reliqui duo.

Si tandem ſit obtuſus, ut B A C, & latera cognita ſint B A, C A. (*fig.* 2. *Tab.* 15.) Producatur unum latus, ut B A, verſus D, donec occurtat perpendiculari C D ex vertice C ductæ.

Conſideretur triangulum rectangulum A D C, in quo percommodè cognoſci poſſunt omnes anguli, & unum latus: nam angulus D, ex ſuppoſitione, rectus eſt, & angulus C A D eſt

complementum anguli dati B A C, ac proinde cognitus. Ergo etiam tertius A C D habebitur; porro, cùm & latus A C datum ſit, per ſupradicta habebuntur reliqua latera C D, A D.

Si itaque lateri dato B A addatur latus A D jam inventum, habebitur totum latus B D; ſicque in triangulo rectangulo B D C, cognitis jam lateribus B D, C D, cognoſcetur facilè baſis B C; cùm ejus quadratum, ut ſæpius dictum eſt, æquetur quadratis duorum laterum B D, C D.

Quare habebuntur tria latera, & unus angulus trianguli C A B, ex quibus reliqui duo anguli cognoſcentur; ſicque propoſitio oſtenſa eſt per omnes caſus.

PROPOSITIO II.

Datis tribus lateribus trianguli, invenire tres angulos.

Ut hoc habeatur, ſufficit ducere ad aliquod latus perpendicularem: jam perpendicularis valor habebitur per prop. 19 l. 8. Hæc perpendicularis dividet totum triangulum in duo triangula rectangula, in quorum utroque habebuntur duo latera, & angulus rectus cognita. Ergo etiam reliqua omnia innoteſcent; nam ut unum latus datum eſt ad ſinum anguli recti, ita perpendicularis cognita ad ſinum anguli oppoſiti, &c.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

Superficiem Lacus ABCDEFG dimetiri. (fig. 3. Tab. 15.)

Omnia Figuræ latera dimetire aliqua certa menſura, ut pertica: deinde, circuli quadrante exactè diviſo, cognoſcantur omnes figuræ anguli; quibus ſingulis infigatur baculus, aut quid ſimile, quo facilius de longè cognoſcantur. Ab uno vertice, v. g. G, ducantur radii viſuales ad puncta B, C, D, E; menſurenturque anguli A G B, B G C, C G D, D G E, E G F. Quibus peractis, habetur ſuperficies lacus in quinque triangula diviſa, in quorum ſingulis habentur duo latera, & unus angulus cogni-

cognita. Ergo cognoſcetur & tertium latus, & conſequenter ſingulorum triangulorum perpendicularis, & area, quarum aream rum ſumma erit ſuperficies quæſita.

Si hæc ſuperficies ſupponeretur eſſe alicujus piſcinæ æquè ubique profundæ, ut haberetur id, quod ejus ſoliditate continereſtur, ducenda tantùm eſſet hæc ſuperficies in profunditatem.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

TUrris inacceſſibilis AB diſtantiam CB dimetiri. (fig. 4. Tab. 15.)

Supponatur, inveniendam eſſe diſtantiam puncti C a puncto B, quod ſit pes Turris in aperto Mari poſitæ.

In puncto quovis C erigatur baculus; deinde accedendo verſus D, alius baculus in puncto D infigatur; horum baculorum C, D diſtantia exactè menſuretur, ſicuti & angulus D factus a diſtantia CD, & radio viſuali DB; tandem eadem ratione cognoſcatur angulus DCB. In triangulo DCB habebitur unum latus, & duo anguli cogniti: quare per prop. 1. hu. latus quoque CB, quod eſt diſtantia quæſita, innoteſcet.

Hinc facile erit, etiam altitudinem Turris AB invenire. Ducto namque radio viſuali ex puncto C ad verticem Turris A, menſuratoque angulo ACB, habebitur triangulum ACB, in quo cogniti ſunt duo anguli (nam angulus B ſupponitur rectus) & unum latus CB. Quare reliqua omnia cognoſcentur, & per conſequens etiam latus AB, quod eſt altitudo quæſita.

Hujus beneficio Problematis percommodè menſurari poterit diſtantia latitudinis alicujus fluminis, freti, &c.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

LOngitudinem tractus muri inacceſſibilis AB dimetiri. (fig. 5. Tab. 15.)

Eligatur quodvis punctum C, ex quo ducantur radii viſua-

les

les ad puncta A, & B. Menſurentur per probl. præced. diſtantiæ C A, C B, angulusque C radiis viſualibus comprehenſus. Hinc habetur triangulum B C A, cujus unus angulus, & duo latera nota ſunt. Ergo cognoſcetur etiam latus A B, quod eſt longitudo quæſita.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

PUtei A B C D aqua carentis profunditatem dimetiri. (fig. 6. Tab. 15.)

Menſuretur diameter ejus latitudinis A B, ductoque ex puncto A radio viſuali ad punctum D, cognoſcatur angulus B A D. In triangulo A B D angulus D A B jam notus eſt, & angulus B rectus ſupponitur, & latus A B menſuratum eſt. Ergo cognoſcetur latus B D, quod eſt profunditas quæſita.

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

NUbis in aere exiſtentis altitudinem dimetiri. (fig. 7. Tab. 16.)

Supponitur, quòd aer tranquillus ſit, quòdque nubis penè non moveatur, in qua inſit aliquod diſtinctum ſignum, ad quod eodem tempore duo Obſervatores queant collimare.

Eligatur alicujus prati planities, in quo duo Obſervatores poſiti in punctis C, & B eodem tempore circuli quadrante idem punctum nubis A ſinguli obſervent. Quo tempore Obſervator B dimetitur angulum E B A, & conſequenter angulum D B A, Obſervator C menſuret angulum E C A, menſurata deinde diſtantia C B, habetur triangulum A C B, in quo latus C B, & duo anguli noti ſunt. Quare cognoſcetur etiam latus B A. Jam verò in triangulo rectangulo A B F habebuntur angulus F, qui rectus ſupponitur, angulus F B A cognitus, & latus A B notum. Ergo cognoſcetur latus A F altitudo perpendicularis nubis.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

D*Iſtantiam Terræ a Luna dimetiri.* (fig. 8. Tab. 16.)

Sumptum eſt hoc exemplum, ut uoico obtutu cognoſcatur utilitas Trigonometriæ vel in ſcientiis ſublimioribus. Supponitur tamen hic, Tyronem ſatis eſſe erudirum in iis, quæ communiter de ſphæra tradi ſolent, ut ſequentes terminos poſſit intelligere.

Meridianum Firmamenti exhibeat major circulus, minor verò meridianum terreſtrem cœleſti correſpondentem, hoc eſt, in eodem cum illo plano exiſtentem. Punctum A ſit Terræ centrum; C verò punctum meridiani Terreſtris directè ſub æquatore poſiti, tandem D punctum ejuſdem meridiani Pariſios repræſentans, hoc eſt, diſtans a puncto C 49 gradibus. Sphærula B ſit corpus Lunare: ſintque duo Aſtronomi C, D, qui ſupponantur conveniſſe inter ſe, ut methodicè obſervarent quotidie lunare corpus eo momento, quo pertranſibit ipſorum meridianum, ſuaſque invicem obſervationes communicarent.

Supponatur, Obſervatorem in C ſub æquatore poſitum, alteri notum feciſſe, Lunam B die 21 Martii prærisè ſibi perpendicularem fuiſſe, hoc eſt, Lunæ centrum in ſuo Zenith fuiſſe; Aſtronomum verò Pariſienſem B eodem inſtanti obſervaſſe angulum H D B, qui exhibet elevationem Lunæ B ſupra Pariſienſem horizontem, cujus diameter eſt linea G H.

Hinc formatur triangulum D B A compoſitum radio viſuali D B Obſervatoris Pariſienſis, radio Terræ D A, & radio viſuali A B Obſervatoris in C conſtituti, addito radio Terræ A C. In hoc triangulo habetur angulus D A C, ſeu D A B, qui eſt 49 grad., menſuratur enim arcu intercepto inter æquatorem, & Pariſios, cognoſcitur item angulus B D A, qui cooſtat angulo recto H D A, & angulo Obſervatoris H D B. Ergo etiam tertius angulus A B D innoteſcet.

Quibus cognitis, haud erit difficile reliqua omnia cognoſcere, nam ut ſinus anguli A B D ad latus A D, quod jam aliunde habetur, conſtare 1431 leucis, ita ſinus anguli D A B ad latus D B, quod eſt intercapedo inter Pariſios, & Lunam

Non

Non abs te fuerit obiter notare, angulum A B D ab Aſtronomis Parallaxim appellari, quæ nihil aliud eſt, quàm differentia, quæ intercedit intet punctum E, cui in firmamento reſpondet Luna reſpectu Obſervatoris in Terræ centro poſiti, & punctum F, cui in eodem firmamento eadem Luna reſponder reſpectu Obſervatoris in terræ ſuperficie exiſtentis. Ut v. g radius viſualis A B ductus e terræ centro, & tranſiens per Lunæ centrum B terminatur in puncto E firmamenti; cùm contra radius D B a ſuperficie terræ ductus, & per idem Lunæ B centrum tranſiens terminetur in puncto F ejuſdem firmamenti. Porro manifeſtum eſt, angulum E B F oppoſitum ad verticem angulo A B D eſſe, ideoque illi æquari. rurſus nihil diſcriminis eſſe quantum ad radium viſualem, obſervate aliquod ſydus ex terræ centro, & obſervare ex terræ ſuperficie, cùm zenith pertranſit: item quo magis ſydera a terra diſtant, eo minorem habere parallaxim. Sic ſi obſerventur ſtellæ eo modo, quo dictum eſt, teperietur, radios viſuales confundi, nullumque parallaxeos angulum effici. Hinc eſt, quod eorum diſtantia ad lubitum a nobis ſupponi poſſit, ſi aliæ rationes nos cogant. Certè Sol ipſe adeo a terra diſtat, ut nullam ſenſibilem patiatur parallaxim, & ideo, ut ejus diſtantia cognoſcatur, ſequenti problemate opus eſt.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

D*Iſtantiam Solis a Terra determinare.* (fig. 9. Tab. 16.)

Supponendum eſt, Lunam non niſi luce a Sole accepta fulgere, ideoque aliquando ſecundum pattem, aliquando ſecundum ſemiſſem, aliquando ſecundum totum diſcum illuminatam apparere, ſecundum quod magis, minuſve ab illo diſtat, lineam, quæ partem illuminatam a non illuminata ſegregat, eo magis apparere debere curvam, quò hæc ſegregatio proximior fit circumferentiæ viſibili Lunæ, eo præcisè momento, quo ſemiplena apparet, lineam, quæ lumen ab umbra diſpeſcit, rectam perfectè eſſe: hincque fieri non poſſe, quin radius Solis efficiat angulum rectum cum tadio viſuali, qui ab oculo Obſervatoris in Lunam impingit.

Sup-

Supponatur Obſervator in puncto B proſpiciens Lunam C, dum præcisè ſemiplena eſt. Radius A C, qui a Sole A Lunam C illuminat, neceſſariò efficiet angulum rectum cum radio viſuali B C Obſervatoris; alioquin perfectè ſemiplena non appareret. Quo ergo momento ſemiplena videtur, & linea C D, quæ umbram a lumine diſgregat, perfectorum Teleſcopiorum ope recta apparet, facile eſt, exacto inſtrumento, metiri angulum C B A, hoc eſt, in gradibus cognoſcere diſtantiam Lunæ a Sole reſpectu Obſervatoris. Igitur in triangulo rectangulo B C A cognoſcetur etiam angulus B A C, cui opponitur latus B C, quod notum ſupponitur; eſt enim diſtantia Terræ a Luna. Ideoque ut ſinus anguli B A C ad latus B C, ita ſinus anguli recti A C B ad latus A B, quod erit diſtantia quæſita Solis a terra.

Quæ ope perfectorum Teleſcopiorum factæ ſunt obſervationes oſtendunt, angulum BAC adeo exiguum eſſe, ut Terræ a Sole diſtantia ſit ſaltem 30000000 leucarum communium.

PROPOSITIO X.

PROBLEMA.

D*iſtantiam Terræ a Jove dimetiri.* (fig. 10. Tab. 17.)

Supponendum eſt, innoteſcere tempus, quo unus ex Jovis ſatellitibus ſuam revolutionem circa hunc planeram abſolvit.

Supponatur v. g. ſatellitem B 42 horarum tempore decurrere circulum punctualem circa Jovem A.

Obſervator ſit in puncto Terræ D reſpiciens, quo momento reſpectu ſui ſatelles B a Jovis A corpore eclipſim patiatur; hoc eſt, cùm puncta D, A, B in eadem ſint linea recta.

Obſervetur deinde momentum, quo idem ſatelles B ſuo motu tendens in E, ſuum amittat lumen ob ingreſſum in umbram factam a Jovis A corpore in puncto E, dum Solis C radios intercipit, hoc eſt, notetur momentum, quo puncta C, A, E inſunt in eadem recta linea.

Quibus poſitis, cùm ſatelles B ſpacio 42 horarum ſuum curſum conficiat, cognoſcaturque tempus, quo percurrit arcum B E, habebitur etiam ejuſdem arcus B E magnitudo. Eſto illud tempus v. g. ſex horæ. Ergo arcus E B erit ſeptima pars ſuæ circumferentiæ; nam etiam ſex horæ ſunt ſeptima pars 42 horarum. Itaque in triangulo A C D notus fiet angulus

C A D oppoſitus ad verticem angulo B A E, qui jam ex hac obſervatione notus ſupponitur; deinde menſuretur angulus A D C, qui eſt diſtantia in gradibus centri Solis C a centro Jovis A. Ergo cognoſcetur & tertius angulus D C A. Quare cùm innoteſcat etiam latus D C diſtantia Solis a Terra, innoteſcent reliqua omnia, hoc eſt D A diſtantia Jovis a Terra, & A C diſtantia Solis a Jove.

Omnia, quæ in hac Trigonometria dicta ſunt, ſinuum calculum ſupponunt: quare methodum, qua hujuſmodi calculus habeatur, cognoſcere neceſſe eſt.

Conſtructio Tabularum Sinuum, Tangentium, & Secantium.

Memoria recolas oportet, ſinum arcus eſſe ſemiſſem chordæ duplum arcum ſubtendentis: Radium circuli communiter ſupponi continere 100000 partes, ex qua ſuppoſitione, cùm chorda arcus 60 grad. par ſit radio, erit ipſa quoque 100000 partium: Chordam 60 grad. ex definit. duplam eſſe ſinus anguli, ſeu arcus 30 grad. Ergo ſinus arcus, ſeu anguli 30 grad. erit 50000 partium.

PROBLEMA I.

Dato ſinu alicujus arcus, ſinum complementi ejuſdem arcus invenire; ut dato ſinu, v. g. 30 grad. invenire ſinum 60 grad. (fig. 11. Tab. 17.)

Sinus datus F B unà cum linea B D, aut illi æquali F E format angulum F rectum, cujus hypotenuſa eſt radius B E. Jam B D eſt ſinus arcus B C, qui eſt complementum arcus dati A B: itaque ſi ex quadrato lateris E B, hoc eſt 100000, auferatur quadratum lateris B F, ſcilicet 50000, reſiduum erit quadratum lateris F E, ſeu B D, cujus radix quadrata erit ſinus arcus B C 60.

PROBLEMA II.

Data chorda, invenire chordam, quæ ſemiſſem arcus datæ chordæ ſubtendat. (fig. 12. Tab. 17.)

Eſto

Eſto data chorda B C; invenienda ſit chorda B E ſubtendens arcum B F E ſemiſſem arcus B F E C ſubtenſi a data chorda B C.

Ex centro A ducantur radii A B, A E; radius A E ſecabit chordam B C perpendiculariter, & bifariam in D per prop. 1. lib. 3. Hinc habentur duo triangula rectangula E D B, B D A, ubi latus B D eſt cognitum, eſt enim ſemiſſis chordæ datæ.

Itaque ex quadrato radii B A ablato quadrato lateris B D, reſiduum erit quadratum lateris A D. Ergo ejus radix quadrata A D haberi poterit, & conſequenter etiam linea E D, quæ cum linea A D radio æquatur. Quare in triangulo E D B additis in unum quadratis laterum B D, E D, habebitur quadratum baſeos B E, & conſequenter linea B E quæſita.

PROBLEMA III.

Data chorda, invenire chordam, quæ ſubtendat arcum duplum arcus datæ chordæ. (fig. 13. Tab. 17.)

Solutio hujus problematis ſequentem ſupponit propoſitionem.

In omni quadrilatero circulo inſcripto rectangulum ſub duabus diagonalibus æquatur ſummæ duorum rectangulorum ſub lateribus oppoſitis, hoc eſt rectangulum ſub diagonalibus C F, D E æquatur duobus rectangulis ſub lateribus D C, E F, & ſub lateribus C E, D F.

Ducatur linea C B, ita ut angulus B C E æquetur angulo A C D.

Recolatur iterum memoria. Triangula ſimilia habere latera homologa proportionalia: In omni proportione geometrica productum extremorum mediorum producto æquari: Idem eſſe, unam magnitudinem in aliam quamcunque ducere, ac eandem primam magnitudinem in ſingulas ſecundæ magnitudinis partes ducere; ut in appoſito exemplo rectangulum ſub C F, & D E idem eſſe ac rectangulum ſub C F, & D B plus rectangulo ſub eadem C F, & B E; cùm D B, & B E ſint partes componentes lineam D E.

Quibus poſitis: Triangula C D B, C F E ſunt ſimilia; nam anguli C D B, C F E eidem arcui C E inſiſtunt, & angulus D C B eſt æqualis angulo E C A; cùm angulus A C B communis additus ſit utrique angulo D C A, E C B, qui ex hypoth æquan-

tur inter ſe. Ergo etiam tertius angulus C B D tertio C E F æquatur.

Quare latus D C eſt ad latus F C, ut latus D B ad latus F E. Igitur cùm mediorum producto par ſit productum extremorum, rectangulum ſub D C, & F E æquale eſt rectangulo ſub C F, & D B.

Solùm ergo ſupereſt oſtendendum, rectangulum ſub D F, & C E æquari rectangulo ſub C F, & B E. Quod quidem facile eſt. Nam triangula C D F, C B E ſunt ſimilia; nam angulus D F C æquatur angulo C E B, cùm inſiſtant eidem arcui D C, & angulo D C F æqualis eſt ex conſtructione angulus E C B. Quare cum etiam tertius angulus C D F tertio C B E par ſit, latera homologa erunt proportionalia.

Ergo latus D F eſt ad latus F C, ut latus B E ad latus C E. Cùm itaque producto ſub extremis æquetur productum ſub mediis, rectangulum ſub D F, & C E par erit rectangulo ſub C F, & B E.

Atqui rectangulum ſub C F, & D B additum rectangulo ſub C F, & B E eſt idem ac rectangulum ſub C F, & D E.

Igitur rectangulum ſub duabus diagonalibus C F, D E æquatur duobus rectangulis ſub lateribus oppoſitis D C, F E, & C E, D F quadrilateri circulo inſcripti.

Qua propoſitione oſtenſa, licebit nunc problema propoſitum determinare.

Data ſit chorda, ut A B (*fig.* 14 *T.* 17.) 60 grad., quæ cùm æquetur radio, erit 100000 partium; invenienda autem ſit chorda A C, quæ ſubtendat arcum A E B C, qui ſit duplus arcus A E B 60 grad. a data chorda A B ſubtenſi.

Ducta diametro B D, quæ erit 200000, inveniatur valor chordæ A D, quod facile eſt ob triangulum B A D rectangulum, ablato enim quadrato lateris A B ex quadrato diametri B D, reſiduum erit quadratum lineæ A D, & peractis calculis, chorda A D erit 174922.

Chorda B C cùm æquetur chordæ A B, erit 100000 partium; itemque chorda C D æqualis chordæ A D erit 174922 partium.

Si ergo ducatur numerus 174922 in 100000, hoc eſt D C in A B, & producti duplum, ſcilicet 34984400000, accipiatur, habebitur valor rectanguli ſub diametro B D, & chorda quæſita A C.

Diviſo autem producto 34984400000 per 200000, hoc eſt, per diametrum B D, proveniet numerus 174922 valor chordæ quæſitæ A C.

Ope

Ope hujus propoſitionis, datis duabus chordis inæqualibus, facilè invenietur chorda, quæ ſubtendat arcum æqualem illis duobus a datis chordis ſubtenſis. Eadem enim erit operatio.

Corollarium.

Data chorda trium, aut quinque graduum, invenire chordam unius gradus; ſeu, ut idem univerſalius proponatur, data chorda quacunque, invenire chordam, quæ ſubtendat tertiam, ſeu quintam partem arcus a data chorda ſubtenſi.

Data chorda ſit v. g. 60 grad., quæ eſt 100000, quæraturque chorda 20 grad.

Manifeſtum eſt, hanc chordam 20 grad majorem eſſe debere tertia parte numeri 100000. Sumpta itaque tertia parte ex 100000, eique additis aliquibus partibus, ſupponatur, ſummam, quæ provenit, eſſe chordam 20 graduum.

Quibus peractis, ut hæc ſuppoſitio vera ſit, inventis per hoc probl. chordis 40, & 60 grad, ſumma, quæ proveniet, debebit eſſe 100000 pro chorda 60 graduum.

Si verò ſumma inventa major, vel minor eſt, quàm eſſe debeat, ſuppoſitio quoque major, vel minor juſto fuit, ideoque iterum vel augenda, vel minuenda erit, donec, adimpletis, quæ ſupra dicta ſunt, habeatur præcisè numerus 100000 pro chorda 60 grad.; tunc enim certum erit, ultimam ſuppoſitionem eſſe chordam 20 graduum.

Eadem via invenietur chorda arcus, qui ſit quinta pars arcus dati.

PROBLEMA IV.

Tabulam ſinuum conſtruere.

Jam habetur chorda 60 grad., hæc enim radio æquatur, ideoque eſt 100000.

Habebitur itaque per probl. ſecundum chorda 30 grad., & chorda 15 grad.

Cognita chorda 15 grad. per præced. corol. habebitur chorda 3 grad.

Cognita chorda 3 grad. per corol. præced habebitur chorda 1 grad.

Co-

Cognita chorda 1 grad. per probl. ſecundum habebitur chorda 30 minutorum; item chorda 15 minutorum; item per corol. præced. chorda 3 minutorum, tandem chorda 1 minuti.

Cognita chorda 1 minuti per problema tertium habebitur chorda 2 minutorum.

Hujus ultimæ chordæ ſemiſſis erit ſinus arcus 1 minuti.

Inventis autem ſemel chordis 1, & 2 minutorum, facile invenietur per probl. præc. chorda 4 minutorum, deinde chorda 5 minutorum, &c. Ideoque non niſi patientia, & labore opus eſt, ut calculis omnium ſinuum perpaucæ propoſitiones traditæ applicentur.

Permultas alias propoſitiones eſſe, quæ operationes breviter expediunt, negandum non eſt; illas tamen apponere non eſt neceſſarium: neque enim in animo eſt Tabulam conſtruere; ſed ſufficit, quomodo Tabula conſtrui poſſit, indicaſſe: In omnibus trigonometricis libris hujuſmodi Tabulæ impreſſæ reperiuntur perexactè: eas conveniant, qui per triangula operam cupiunt.

Verùm nonnulla dicenda ſuperſunt de Tangentibus, & Secantibus, quarum uſus frequens eſt in operationibus aſtronomicis, cùm ferè ſemper conſiderentur triangula, quæ ſphærica dicuntur, hoc eſt, quæ maximorum ſphæræ circulorum arcubus fiunt.

Eſto angulus C A D 30 grad (*fig.* 15. *T.* 17.) cujus ſinus E B, qui conſequenter erit 50000 partium.

Tangens D C parallela ſinui E B, & terminata radio A E producto appellatur ſimpliciter Tangens arcus E C, & linea A D Secans.

Facile autem eſt determinare tangentem D C, & ſecantem A D ſecundum illas partes, quibus ſinus E B conſtare ſupponitur; nam cognito ſinu E B, cognoſcitur etiam linea A B; triangulum enim A B E rectangulum eſt, ideoque ablato quadrato lateris E B ex quadrato radii A E, reſiduum erit quadratum lateris B A, cujus radix quadrata erit linea A B.

Jam ob triangula ſimilia A B E, A C D, ut latus A B eſt ad latus B E, ita radius A C ad tangentem C D.

Ubi igitur aliquando inventa fuerit Tangens, nullo negocio invenietur & ſecans. Nam in iiſdem triangulis ſimilibus, ut ſinus B E eſt ad radium E A, ita Tangens C D ad ſecantem D A.

Licebit etiam alio modo ſecantem invenire. Triangulum A C D cùm ſit rectangulum, ſi quadrato radii A C addatur quadratum tan-

tangentis C D, habebitur quadratum hypotenuſæ A D, cujus radix quadrata erit ſecans A D.

Quare unica hæc propoſitio ſufficit ad determinandas partes omnium tangentium, & ſecantium arcuum quorumcunque, quorum ſinus jam cognoſcantur. Non ſtat itaque ulterius progredi, præcipuè cùm non deſint, qui hac in parte ſatis laboraverint: earum tabulæ unà cum tabulis ſinuum impreſſæ ſunt; ad illas accedere, prout opus fuerit, quivis poterit.

De Sinubus, Tangentibus, & Secantibus arcuum compoſitorum,

THEOREMATA QUATUOR ELEMENTARIA, & apprimè utilia.

THEOREMA I.

Rectangulum C F × B O *ſub ſinu recto* C F *cujuſvis arcus compoſiti* A B C, *& radio* B O *æquatur aggregato rectangulorum* B D × E O + C E × D O *ſub ſinubus rectis* B D, C E *arcuum componentium* A B, B C, *& alternis ſinubus complementorum* E O, D O *eorundem arcuum componentium.* (fig. 16. Tab. 17.)

Demonſtratio. Per punctum E, in quo ſinus rectus C E arcus B C radio B O occurrit, agantur E I, & E H, hæc quidem parallela ſinui recto B D arcus A B, illa verò radio A O. Eruntque triangula B O D, C E I ſimilia. Nam quia anguli ad verticem oppoſiti E G C, F G O ſunt æquales, & triangula C E G, O F G rectangula ſunt, æquabuntur etiam anguli E C I, B O D; pariter quia triangula C E I, B O D in I, & D ſunt rectangula, angulique E C I, & O æquales oſtenſi ſunt, etiam anguli C E I, O B D æquales erunt, atque adeo triangula C E I, O B D ſimilia exiſtent; hinc C E. C I. B O. D O. Ergo rectangula extremorum, & mediorum ſunt æqualia, C I × B O = C E × D O.

Porro cùm B D, E H (conſtr.) parallelæ ſint, erit B O. B D :: E O. E H, vel I F. Ergo rectangula extremorum, & mediorum æquantur, I F × B O = B D × E O; additiſque æqualibus fit I F × B O + C I × B O = B D × E O + C E + D O: ſed ob communem altitudinem B O, eſt I F × B O + C I × B O = C F × B O. Ergo reperitur tandem C F × B O = B D × E O + C E × D O. Q. E. O.

THEOREMA II.

Rectangulum F O × B O *ſub ſinu complementi* F O *arcus compoſiti* A B C, *& radio* B O, *æquatur exceſſui* D O × E O

$\times EO - BD \times CE$ *rectanguli ſub ſinubus complementi* DO, EO *arcuum componentium* AB, BC *ſupra rectangulum ſub ſinubus rectis* BD, CE *eorundem arcuum componentium.* (fig. 16. Tab. 17.)

Demonſtratio. Iiſdem poſitis, quæ in demonſtratione præced. propter triangula ſimilia OBD, OEH erit BO. DO :: EO. HO. Ergo rectangula extremorum, & mediorum æquantur, $HO \times BO = DO \times EO$. Et triangula ſimilia CEI, OBD præbent CE. EI, vel HF :: BO. BD, hinc producta mediorum, & extremorum æquantur, $HF \times BO = BD \times CE$: & quia, ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reſidua ſunt æqualia, erit $HO \times BO - HF \times BO = DO \times EO - BD \times CE$: atqui ob communem rectangulorum altitudinem BO, eſt $HO \times BO - HF \times BO = FO \times BO$. Ergo etiam $FO \times BO = DO \times EO - BD \times CE$. Q. E. D.

THEOREMA III.

Tangens AH *cujuslibet arcus compoſiti* ABC *quadrante minoris eſt ad aggregatum* FG *tangentium* BF, BG *arcuum* BA, BC, *ut quadratum radii ad exceſſum ejuſdem quadrati ſupra rectangulum ſub tangentibus* BF, BG *arcuum componentium. Probari debet, quòd* $AH. FG :: BD^2. BD^2 - FB \times BG$. (fig. 17. Tab. 17.)

Demonſtratio. Producatur radius BD in E; demiſſiſque ex C perpendicularibus CM, CI ad radios DA, DB, ex puncto I agatur IN parallela CM; & tandem protrahatur CI in P. Hiſce peractis, rectæ GF, & CP eidem radio DB perpendiculares erunt parallelæ, ac propterea a radio DB proportionaliter ſecabuntur, ita ut futurum ſit, ut GF. BF :: CP. IP. Et quia CM, & IN parallelæ ſunt, triangula PCM, & PIN ſimilia exiſtent, ac propterea CP. IP :: CM. IN. Igitur fiet etiam GF. BF :: CM. IN. Sed parallelæ HA, CM, quæ etiam proportionaliter ſecantur a ſecante DE, efficiunt AE, vel BF. AH :: ML. CM. Ergo ex *æquo perturbatè* GF. AH :: ML. IN; ſeu *invertendo* AH. GF :: IN. LM: at verò ob æquidiſtantes IN, LM ſimilia ſunt triangula DIN, DLM; unde IN. LM :: DI. DL; atque adeo AH. GF :: DI. DL.

Porro ſimilitudo triangulorum DIC, DBG præbet DI.IC.: DB.BG; & ſimilia triangula CIL, DBF (ſunt enim triangula rectangula CLI, DLM ob angulos ad verticem L æquales ſimilia; & rectangula triangula DML, DBF propter communem utrique angulum D pariter æquiangula, adeo ut ipſa CIL, & DBF ſimilia eſſe, neceſſum ſit) ſuppeditant IC.IL::DB.BF. Adeoque ducendo terminos hujus analogiæ in homologos analogiæ præcedentis, ideſt primum in primum, ſecundum in ſecundum, &c. erit IC×DI.IL×IC:: DB² BF×BG, vel, quia rectangula æquè alta IC×DI, IL×IC ſunt ut baſes DI, & IL, erit DI.LI:: DB².BG×BF; & *convertendo* DI.DL::DB² DB²—BF×BG. Sed paulo ante inventum erat AH.GF:: DI DL. Ergo AH.GF::DB². DB²—BF×BG. Q.E.O.

THEOREMA IV.

SEcans DH arcus compoſiti ABC ex arcubus AB, CB eſt ad radium DA, ut rectangulum DG×DF ſub ſecantibus arcuum componentium ad quadratum radii DB, dempto rectangulo FB×BG ſub tangentibus eorundem arcuum componentium AB, CB. Hoc eſt DH.DA::DG×DF.DB²—BF×BG. (fig. 17. Tab. 17.)

Demonſtratio. Triangula HDA, GDF, quæ habent communem angulum CDA ſunt inter ſe, ut rectangula ſub lateribus communem angulum comprehendentibus; unde Triang. HDA. Triang. GDF::HD×DA.GD×DF. Verùm ſi in iiſdem triangulis latera HA, & FG ſumantur pro baſibus, eorum altitudines DA, & DB æquales triangula baſibus ſuis proportionalia reddent. unde Triang HDA. Triang. GDF:: HA.GF. Verùm *per præced. Theor.* HA.GF::DB². DB²—BF×BG. Ergo Triang. HDA. Triang. GDF::DB².DB²—BF×BG. Sed paullo ſupra reperiebatur Triang. HDA. Triang. GDF::HD×DA.GD×FD. Ergo HD×DA.GD×DF::DB², vel DA². DB²—BF×BG; & *permutando* HD×DA.DA²::GD×FD.DB²—BF×BG. Verùm ob communem altitudinem DA, eſt HD×DA.DA²::HD.DA. Ergo erit etiam DH.DA::GD×FD.DB²—BF×BG Q.E.D.

PRO-

PROBLEMATA QUÆDAM ARITHMETICA, ET GEOMETRICA OPE SPECIOSÆ SOLUTA

Ad ejus utilitatem dignoſcendam.

QUi Algebræ principiis imbuti non ſunt, ab horum, quæ ſequuntur, problematum examine abſtineant, quæ ea tantùm de cauſa hìc appoſita ſunt, ut quantæ utilitatis Speciosa ſit, appareat, ſimulque innoteſcat, quàm facilè ſolvantur quædam Propoſitiones, quæ ordinaria methodo difficillimè ſolverentur. Cæterùm ne quiſquam abjiciat ſeſe, ſi quid difficile in ipſis offendat principiis. Myſterium tale non eſt, quale primo intuitu apparet; cùm pleraque omnia hæc Problemata & inventa, & reſoluta ſint a Juvene treſdecim, aut quatordecim annorum.

PROBLEMATA ARITHMETICA.

INvenire tres numeros, ita ut differentia inter quadrata duorum ex illis quibuſcunque addita ſolido omnium trium, ſemper efficiat quadratum; & ſumma trium differentiarum eidem ſolido addita quadratum pariter producat; & tandem ipſi numeri ſint in proportione arithmetica.

Primus eſto a + 1; ſecundus 2 a + 1; tertius 3 a + 1: ſolidum ponatur a a + 2 a + 1; differentia quadratorum duorum priorum eſt 3 a a + 2 a, quæ ſolido addita exhibet perfectum quadratum 4 a a + 4 a + 1. differentia quadratorum extremorum eſt 8 a a + 4 a, quæ eidem ſolido addita adhuc quadratum perfe-

ctum præbet 9 a a + 6 a + 1 Reſtat ergo, ut tam differentia quadratorum inter duos ultimos numeros, quàm ſumma trium differentiarum ſolido addita faciant quadrata Differentia quadratorum inter duos ultimos eſt 5 a a + 2 a, ſumma trium differentiarum eſt 16 a a + 8 a.

Harum ſummarum utraque ſolido addita dat ob duplicem æqualitatem 6 aa + 4 a + 1; & 17 aa + 10 a + 1. Differentia eſt 11 a a + 6 a. Productores ſunt $\frac{11}{5}$ + 2; & 3 a Eorum ſumma $\frac{20}{5}$ + 2; hujus ſemiſſis $\frac{10}{5}$ + 1. Ejus quadratum $\frac{100}{25}$ + $\frac{20}{5}$ + 1 æquatur 17 a a + 10 a + 1. Ex quo colligitur, a æquari $\frac{20}{7}$. Tres numeri poſiti a + 1; 2 a + 1, 3 a + 1, erunt $\frac{27}{7}$; $\frac{47}{7}$; $\frac{67}{7}$; & ſolidum ſuppoſitum erit $\frac{120960}{343}$.

Ordinariæ methodi beneficio facile eſt habere numeros reales, & æquare deinde ſuppoſitum ſolidum ſolido trium numerorum inventorum.

ALIUD PROBLEMA.

INvenire duo triangula rectangula, in quibus ſumma, & differentia Perimetrorum ſit quadratum, & ſimiliter quadratum ſit differentia arearum; differentia inter minus latus primi trianguli, & latus minus ſecundi æquetur differentiæ duorum majorum laterum primi trianguli, aut duorum majorum laterum ſecundi, & hæc differentia ſit cubus; item differentia medii lateris primi, & minoris ſecundi efficiat quadratum; & tandem ſumma minoris lateris primi, & medii ſecundi ſit quadratum.

Primum triangulum eſto formatum ex a + 1, & 2; & ſecundum ex a − 1, & 2. Primum erit a a + 2 a + 5, a a + 2 a − 3, 4 a + 4, ſecundum a a − 2 a + 5, a a − 2 a − 3, 4 a − 4. Reſtat, ut differentia arearum 12 a a − 12, & differentia perimetrorum 8 a + 8 ſint quadrata.

En quomodo reſolvo hanc æquationem extraordinariam. Statim adæquo 8 a + 8 quadrato, puta 9; ex quo a æquatur 1: ſed quoniam hic valor minimè ſatisfacit ipſi 12 a a − 12, ideo inveniendum eſt quadratum tale, ut ſi ab eo demantur 8, & reſiduum dividatur per 8, quotiens inde ortus ſit hujuſmodi, ut ejus quadratum duodecies diminutum numero 12 adhuc quadratum efficiat.

Tale

Tale quadratum ſit a a, demptis 8, reſtat a a — 8, quod diviſum per 8, exhibet $\frac{aa-8}{8}$, cujus duodecuplum quadratum eſt $\frac{12\,aaaa-192\,aa+768}{64}$; demptis ergo 12 in eadem denominatione 768, reſtat quantitas ſine denominatore 12 aaaa — 192 aa quadrato æquanda. Hac diviſa per 4 a a, habetur 3 a a — 48 quadrato pariter æquanda. Quare quæro quadratum, quod auctum numero 48 efficiat quadratum triplum. Sit hoc a a, quod auctum numero 48 efficit a a + 48 æquale triplo quadrato. Ergo $\frac{aa}{3}+16$ æquatur quadrato, ſicut & 16 — 8 a + a a: unde a æquatur 12, cujus quadratum eſt 144, quod æquale factum ipſi 3 a a — 48 producit a a. In primis pono 64 æquari ipſi 8 a + 8, unde deduco 7 valorem ipſius a, cujus ope reſolvendo poſitiones, habebuntur duo triangula quæſita:

Primum	32.	60	68
Secundum	24	32.	40.

ALIUD PROBLEMA.

Invenire tres numeros, ita ut ſumma, vel differentia duorum utcunque ſumptorum diverſa efficiat quadrata.

Tres numeri ſint a a + 16, 8 a, 4 a a + 4. Duorum ram priorum, quàm poſtremoruro ſumma, vel differentia quadratum eſt. Reliquum ergo eſt, ut & ſumma, & differentia extremorum dent quadrata: ergo 20 + 5 a a, & 12 — 3 aa debent quadratis æquari.

Facile videre eſt juxta Diophanti obſervationem, numerum 1 huic duplici æqualitati facere ſatis, ſed ſi poſitiones reſolvantur per hunc valorem, duæ ultimæ eundem exhiberent numerum. Quare inveniendum eſt aliud quadratum ab 1 diſtinctum, cujus quintuplum addito numero 20, & cujus triplum ſubductum ex 12 faciant quadrata.

Latus hujus quadrati ſit 1 — a. Ergo 25 — 10 a + 5 a a, & 9 + 6 a — 3 a a æquantur duobus quadratis, quorum primum ductum in 9, & ſecundum in 25, dant 225 — 90 a + 45 a a; & 225 + 150 a — 75 aa æqualia quadratis. Eorum differentia eſt 240 a — 120 a a; Productores 30 — 15 a, & 8 a; quadratum ſemiſſis eorundem ſummæ 225 — 105 a + $\frac{225}{4}$aa. unde a par 1-

ipſi

pli $\frac{1025}{1764}$, & conſequenter latus poſitum $1-a$ erit $\frac{672}{1764}$, & quadratum quæſitum $\frac{451584}{3111696}$; quare reſolvendo poſitiones, habentur tres numeri denominatoribus carentes, ſcilicet

2399057. 1873432. 2288168.

Tres ſummæ, & tres differentiæ exhibent hæc ſex diverſa quadrata.

4272489	Radices	2067
4161600		2040
4687225		2165
110889		333
525625		725
414736		644

ALIUD PROBLEMA.

INvenire quatuor numeros, ita ut duorum quorumcunque ſumma alicui numero dato, puta 15, addita efficiat quadratum.

Quatuor numeri ſint A. B. C. D. Ergo

$15+a+b=ff$	$a=ff-b-15$
$15+b+c=mm$	$b=mm-c-15$
$15+c+d=tt$	$c=tt-d-15$
$15+b+d=pp$	$d=pp-b-15$
$15+a+c=$ quadrato	
$15+a+d=$ quadrato	

Subſtituendo in æquatione a loco b ejus valorem $mm-c-15$

$$a=ff-mm+c$$

Subſtituendo pro c, quod hîc reperitur, ejus valorem $tt-d-15$

$$a=ff-mm+tt-d-15$$

Similiter ſubſtituendo in æquatione b loco c ejus valorem $tt-d-15$

$$b=mm-tt+d$$

Quare ſubſtituendo pro b, quod eſt in æquatione d, ejus valorem

$$d=pp-mm+tt-d-15$$

Et addendo hinc, & inde d, proveniet

$2d=pp-mm+tt-15$. Ergo $d=\frac{pp-mm+tt-15}{2}$

Quare ſubſtituendo valorem ipſius d in æquationibus a, b, et c

$$a=\frac{2ff+tt-mm-pp-15}{2} \qquad c=\frac{tt+mm-pp-15}{2}$$

$$b=\frac{mm+pp-tt-15}{2} \qquad d=\frac{pp+tt-mm-15}{2}$$

Con-

Conſtat igitur, hos eſſe quatuor numeros, ex quibus non minus, quàm ex iſtis a + b + 15, b + c + 15, b + d + 15, c + d + 15 quadrata efficiuntur. Reſtat itaque, ut a + c + 15, & a + d + 15 efficiant quadrata: hi duo numeri reducti ad valores ſupra inventos exhibent ff + tt − pp, & ff + tt − mm equanda quadratis. Unde colligitur hic canon: Inveniantur quatuor numeri, ita ut duorum priorum ſumma multata alterutro poſteriorum quadrata conſtituat.

Ponatur ſumma duorum priorum 625, & tertius numerus ſit 400, qui demptus ex 625 relinquit quadratum; inveniendus eſt quartus numerus, qui demptus ex 625 pariter quadratum relinquat. Nota, ad rem nihil conducere, & a. & b eundem evadere numerum, ſi adhibeatur numerus 225: Itaque 625 − a a æquetur quadrato, ſicuti & $625 - \frac{25}{9}$ a + $\frac{225}{81}$: unde a = $\frac{200}{7}$, cujus quadratum eſt $\frac{40000}{441}$, quod ablatum ex 625 relinquit quadratum. Reducendo 625, & 400 ad hanc denominationem, habebuntur ſine denomioatore pro ſumma duorum priorum quadratorum quæſitorum 180625, & pro tertio, & quarto 115600, 40000. Si nunc dividatur ſumma 180625 in duo quadrata, puta in 400 a a, & 441 a a, ſumma 841 a a debet æquari ſummæ 180625: quare a a erit $\frac{180225}{841}$, & duo ultima quadrata erunt $\frac{72250000}{707281}$, $\frac{79806225}{707281}$: reductis duobus ultimis ad hanc denominationem, & dempto denominatore, quatuor quadrata quæſita erunt $\frac{tt}{707281}$, $\frac{ff}{2965225}$, $\frac{mm}{31640000}$, $\frac{pp}{97216600}$, quæ ſi appellentur t t, f f, m m, pp, & ad eorum valorem reducantur, quatuor numeri ſupra inventi erunt

a. $\frac{100701633}{2}$.

b. $\frac{58609585}{2}$.

c. $\frac{8670385}{2}$.

d. $\frac{133820585}{2}$.

qui tales ſunt, ut duorum quorumcunque ſumma numero 15 aucta quadratum efficiat.

ALIUD PROBLEMA.

Dividere quemvis datum numerum in quatuor partes, ita ut duarum quarumcunque differentia quadratum ſit.

Inve-

Inveniendi ſtatim ſunt quatuor numeri, ita ut duorum quorumcunque differentia quadratum conficiat. Ad hoc ſumo tria quadrata methodo ordinaria inventa, quæ ſunt 42185025, 38452401, 37454400, quæque talia ſunt, ut duorum quorumcunque differentia ſit quadratum. Pono a quartum numerum: ergo 42185025 — a, 38452401 — a, 37454400 — a æquantur quadratis. Eorum ſolidum eſt 607553626893776643600000 — 46423419058694 25 a + 1180918 26 a^2 — a^3 = quadrato, ſicut & 607553626893776643600000 — 46423419058694 25 a + ... $\frac{2455133837099136524726514083062522}{24302145075751065744000 0}$. Unde colligitur a æquari .... $\frac{71479085061321515042849356093 75}{24302145075751065744000 0}$.

Si quærantur quatuor numeri integri, ſatis erit ducere tria quadrata ſupra inventa in denominatorem hujus fractionis, & provenient quatuor numeri, ita ut duorum quorumcunque differentia ſit quadratum.

Ut brevitati conſulam, ſuppono hos quatuor numeros jam cognitos, eſſe B, C, D, E, & propoſitum numerum dividendum eſſe 7: nunc non niſi ſupponendum eſt, quatuor diviſionis partes eſſe b + a, c + a, d + a, e + a, quæ omnibus conditionibus ſatisfaciunt: deinde æquanda eſt ſumma b + c + d + e + 4a dato numero 7: unde a reperitur $\frac{7 - b - c - d - e}{4}$. Porro facili negocio fieri poteſt, ut numeri b + c + d + e ſint minores numero propoſito: Si enim dividantur per quodvis quadratum, ſemper erunt hujuſmodi, ut duorum quorumcunque differentia ſit quadratum, ſumique poterit pro denominatore quadratum tam magnum, ut fractio inde orta ſit minor propoſito numero dividendo. Ex quo ſimul colligitur, infinitas dari poſſe ſolutiones, quibus huic Problemati ſatisfiat, quod ſic proponi poterit:

Quemvis numerum infinities partiri in quatuor partes, ita ut duarum quarumcunque differentia ſit quadratum.

PRO-

PROBLEMATA GEOMETRICA.

IN nullo, opinor, geometrico loco magis apparet Specioſæ utilitas præ Geometria ordinaria, quàm in Ellipſi conſiderata juxta methodum Carteſii tanquam linea curva, cujus omnia puncta neceſſariam quandam habent relationem ad omnia puncta alicujus lineæ rectæ, quæ eadem æquatione exprimitur.

Sit v. c. (*fig. 18. Tab. 18*) linea curva A L I, & puncta A, & I jungat linea A K I, quam majorem axem vocabo. Hanc lineam curvam talis naturæ ſuppono, ut ſi ex quocunque puncto, ut D, ducantur ad axis puncta F, & C, lineæ D F, D C, harum duarum linearum D F, D C ſumma æquetur ſemper axi A I. Supponatur axis diviſus in duas æquales partes in puncto K, & ex puncto D demittatur ad axem perpendicularis B D.

Sit A F = a A B = y A I = c
A C = b D B = x. B F = a − y, vel y − a

Ob triangulum rectangulum D B F quadratum lineæ D F eſt a a − 2 a y + y y + x x. & ob triangulum rectangulum D B C quadratum lineæ D C eſt b b − 2 b y + y y + x x. Ergo ex proprietate curvæ $\sqrt{aa - 2ay + yy + xx} + \sqrt{bb - 2by + yy + xx} = c$. Ergo $aa - 2ay + yy + xx = cc + bb - 2by + yy + xx - \sqrt{4bbcc - 8bycc + 4yycc + 4xxcc}$. Ergo reducendo æquationem tandem habetur

$$xx = \frac{+4baa + 4abb}{bb + 2ab + aa}\,y - \frac{4aby\,y}{bb + 2ab + aa}.$$

Atqui linea A F + linea A C æquatur lineæ A I, hoc eſt bb + 2 a b + a a = c c, & inſuper b a a + a b b eſt idem productum quod b a c; nam b a a + a b b eſt productum ipſius b a in a + b, quod æquatur ipſi c. Ergo

$$xx = \frac{4ab}{c}\,y - 4\frac{aby\,y}{cc}.$$

Deinde ſi fiat c. 2 a :: 2 b. quart lin. , quæ appelletur r, habebitur $xx = ry - \frac{ryy}{c}$, quod eſt decimatertia propoſitio lib. prim. Conic Apollon.

T Hinc

Hinc ſequitur, ad hoc, ut habeatur linea r, quæ eſt Parameter Ellipſis, inveniendam eſſe quartam proportionalem tribus lineis, quarum prima eſt axis, ſecunda dupla lineæ, quę continetur inter alterutram axis extremitatem, & propiorem focum, & tertia dupla lineæ interceptæ inter focum, & remotiorem axis extremitatem.

Ulterius, ductis ad punctum K minore axe L K, & ad focum F linea L F, hæc linea L F = lineæ A K erit $\frac{c}{2}$, & linea F K erit $\frac{c}{2} - a$. Ergo ſi ex quadrato lineæ L F aufero quadratum lineæ F K, reſtabit $ca - aa$ pro quadraro lineæ L K, & conſequenter $4ca - 4aa$ pro quadrato axis L M: atqui $4ca - 4aa$, ut patet, $= 4ba$; nam $c - a = b$. Ergo quadratum axis L M eſt æquale rectangulo ſub majori axe A I, & parametro. Unde etiam ſine alia demonſtratione infertur, rectangulum majoris axis in parametrum, quod figura vocatur, quadruplo majus eſſe rectangulo linearum A F, F I.

Sint duæ lineæ A E, E I (*fig.* 19. *T.* 18.) ad rectos angulos in puncto E, in quo etiam inſit centrum E circuli L M N, cui centro adhæreat regula mobilis ejuſdem longitudinis ac linea E A, & ſecundum ejuſdem lineæ longitudinem diſpoſita. Si moveatur circulus ſecundum longitudinem lineæ E I, ita ut ejus centrum E nunquam ab illa recedens rapiat ſecum regulam, quæ ipſi adnectitur, & alia extremitas hujus regulæ defluat per longitudinem lineæ A E; dico, interſectionem regulæ, & circuli deſcripturam curvam C G K, quæ erit Ellipſis, cujus axis major quidem æquabitur lineæ A C, minor verò radio circuli.

Supponatur centrum E perveniſſe ad punctum H, regula, quæ pervenerit ad punctum B, ſecabit circulum in G: ex puncto G agantur perpendiculares G F, G D.

Sit $\begin{cases} B\,G = a \\ G\,H = b \\ C\,E = b \\ G\,D = y \\ C\,D = x \end{cases}$ Ob ſimilia triangula B D G, G F H; $a . y :: b . \frac{by}{a}$ = lin. H F, cujus quadratum demptum ex quadrato lineæ G H relinquit $\frac{bbaa - yybb}{aa}$ pro quadrato lineæ G F, quæ per conſequens erit $\sqrt{\frac{bbaa - yybb}{aa}}$.

Ergo $cd = x = b - \sqrt{\frac{bbaa - yybb}{aa}}$.

Ergo

Ergo $\frac{bbaa-yybb}{aa}=\frac{bbaa-xxbaa+xxaa}{aa}$.

Ergo $yy=\frac{2xaa}{b}-\frac{xxaa}{bb}$.

Deinde ſi fiat b . 2 a :: a . quar. term. vel duplicando antecedentes 2 b . 2 a :: 2 a . quar. termin., puta r, habebitur $yy=rx-\frac{xxaa}{bb}$; & conſequenter, cùm jam bb . aa :: 2 b . r, habebitur tandem $yy=rx-\frac{xxr}{2b}$; quod eſt ea proprietas, quam in Ellipſi demonſtrat Apollon. propoſ 13. lib. 1. Conic.

Hoc ſuppeditat methodum valde ſimplicem deſcribendi organicè Ellipſim in aliquo plano: ſatis ſiquidem eſt, infixo prius aculeo aliquo, ſeu graphio in aliquo regulæ A E puncto C, ipſam regulam ita moveri, ut utraque ejus extremitas ſemper exiſtat in lineis A E, E I; ſiquidem ſignum a graphio deſcriptum perfectè exhibebit Ellipſim.

In Parabola A B C, (*fig.* 20. *T.* 18.) cujus axis eſt B D, datis tribus ordinatis ad axem continuè proportionalibus, ut A D, O I, G L, ſi ſumatur in axe producto linea B N æqualis lineæ B I interceptæ inter verticem, & mediam trium applicatarum; & junctis punctis N, & A linea N A, fiat in eodem axe producto linea B F par duabus extremis trium applicatarum, hoc eſt duabus lineis A D, G L: dico, lineam F M ductam ex puncto F parallelam lineæ N A tranſituram per extremitatem parametri B M, & conſequenter illum determinaturam.

Sit { B D = u, B I = s, M B = r, A D = x, O I = y, Ergo G L = $\frac{yy}{x}$ } Ob naturam Parabolæ $xx=ru$, & $yy=rs$. Ergo $xx+yy=ru+rs$; id, quod in proportione reductum exhibet $x . u+s :: r . x+\frac{yy}{x}$, hoc eſt, linea A D eſt ad lineam D N, ut Parameter eſt ad lineam B F; atqui ob ſimilitudinem triangulorum M B F, A D N, linea A D . D N :: M B . B F. Ergo Parameter æquatur lineæ M B.

In triangulo rectangulo iſoſcelio A C B (*fig.* 21. *T.* 18.) ducatur perpendicularis C D, quæ baſim bifariam ſecet in puncto D, & quæ per conſequens æquetur lineæ A D; ſi in hac perpendiculari accipiatur aliquod punctum, ut O; & facta O I = C O, ex puncto I ducatur linea I E æqualis lineæ D A:

dico, punctum E esse in aliqua Parabola, puta E OM, quæ habebit punctum O verticem, & punctum I focum.

Ad hoc sufficit ostendere, quadratum lineæ E D æquari rectangulo lineæ O D in lineam quadruplam lineæ O I, hoc est in parametrum O G.

Sit { C O = a ; O I = a ; I D = x ; O D = a + x ; C D = 2 a + x ; A D = 2 a + x ; E I = 2 a + x ; O G = a }

Propter triangulum rectangulum IDE, si quadratum lateris I E, quod est 4 a a + 4 a x + x x mulctetur quadrato lateris I D, quod est x x, residuum erit quadratum lateris E D, quod erit 4 a a + 4 a x: atqui rectangulum lineæ O D in lineam O G, hoc est, productum ex a + x in 4 a, est quoque 4 a a + 4 a x. Ergo quadratum lineæ E D æquatur rectangulo sub intercepta, & parametro. Idem continget in quovis alio puncto.

Hinc sine alia demonstratione infertur, (*fig.* 22. *T.* 18) si ex foco I ducatur ad parabolam aliqua linea, ut I E, hanc semper futuram æqualem interceptæ unà cum linea O I inter verticem, & focum contenta; unde facilè colligi potest celebris hæc Parabolæ proprietas: Omnes radii axi paralleli se in foco conjungunt.

Nam sit radius quicunque H E; ex puncto E ducatur tangens F E N: ad hoc autem satis est, si sumatur F O par ipsi O D. Jam, ut ostendatur, quòd radius H E debeat vergere ad punctum I, sufficit ostendere, angulum F E I angulo H E N æquari, hoc est, angulum reflexionis angulo incidentiæ: atqui angulus H E N, sive ei æqualis D F E, æquatur angulo F E I, cùm triangulum E I F sit isosceles; nam linea I E æqualis est lineis D O, & O I; linea verò F I æquatur lineis F O, & O I, lineæ autem D O, F O sumptæ sunt æquales. Ergo &c.

Sit in Parabola I A M (*fig.* 23. *T.* 18) diameter A D cum suo latere recto A G, & sit F C ordinata ad hanc diametrum, si in diametro producta sumatur ex vertice A linea A K par interceptæ A C; dico lineam K F tangere parabolam in puncto F. Ad hoc satis est ostendere, lineam K F, licèt productam, & parabolam non nisi unum commune punctum F habere posse.

Sit A C = z. K C = 2 z. A G = r. C D = y.
Ergo K D = 2 z + y.

Dico

Dico primò, punctum O ſumptum in linea K F infra punctum F non poſſe eſſe in Parabola. Nam ducta ex hoc puncto O linea O D parallela ordinatæ ſecabit neceſſariò diametrum infra punctum C in aliquo puncto, puta D.

Jam ob ſimilitudinem triangulorum K C F, K D O quadratum lateris K C eſt ad quadratum lateris C F, quod eſt æquale ipſi z r, ut quadratum lateris K D ad quadratum lateris D O, hoc eſt, $4zz \;\; zr \,.\, 4zz + 4zy + yy$ quart termin. Ergo $\frac{4rz^3 + 4yrzz + zryy}{4zz}$ æquatur quadrato lateris O D. Nunc nihil aliud oſtendendum eſt, quàm quadratum applicatæ I D minus eſſe hoc quadrato lateris O D. Quadratum ipſius I D par eſt rectangulo linearum A D, A G, hoc eſt $zr + yr$: atqui $zr + yr$ eſt minus, quàm $\frac{4rz^3 + 4yrzz + zryy}{4zz}$, nam ſi multiplicetur utrumque per $4zz$, provenient hinc quidem $4rz^3 + 4yrzz$, inde verò $4rz^3 + 4yrzz + zryy$, quod excedit primum productum quantitate $+zryy$. Ergo quadratum lateris O D majus eſt quadrato applicatæ I D. Ergo linea O D major eſt applicata I D. Ergo punctum O non ſpectat ad Parabolam.

Dico ſecundò, punctum L ſumptum in linea K F ſupra punctum F non poſſe eſſe in parabola. Ex hoc puncto L ducta L B ordinatæ parallela ſecabit diametrum ſupra punctum O in aliquo puncto, ut B.

Sit $CB = y$. Ergo $KB = zz - y$.

Propter triangula K C F, K B L ſimilia oſtendetur, uti ſupra, quadratum lateris B L eſſe $\frac{4rz^3 - 4yrzz + zryy}{4zz}$; quadratum autem ordinatæ N B, quod par eſt rectangulo ſub G A, & B A, hoc eſt $zr - yr$ eodem diſcurſu reperietur minus quadrato lateris B L; ideoque & linea B L major erit applicata B N. Ergo punctum L non eſt in parabola. Q. E. O.

Methodus admodum ſimplex pro invenienda area trianguli, cujus non niſi tria latera cognoſcantur.

Latus (*fig.* 24 *T.* 19) cognitum A B minus ſit $= a$.

Latus cognitum B C medium $= b$.

Latus cognitum A C majus $= c$.

Perpendicularis cadens ab angulo, quem formant duo minora

nora latera ſupra aliquod lateris majoris punctum, ut D, efficiet duo ſegmenta, AD quidem minus, DC verò majus.

Differentia ſegmentorum, quæ incognita eſt, ponatur = x.

Cùm habeatur ſumma ſegmentorum, quæ eſt c, & eorundem differentia, quæ eſt x, ſi ſumma addatur differentiæ, & inde reſultans dividatur per 2, habebitur majus ſegmentum; ſi verò differentia ſubducatur ex ſumma, & reſiduum pariter per 2 dividatur, habebitur minus ſegmentum. Ergo

$\frac{c+x}{2}$ = lineæ DC majoris ſegmenti.

$\frac{c-x}{2}$ = lineæ AD minoris ſegmenti.

Jam ob triangula rectangula ADB, CDB, quadratum lateris AB mulctatum quadrato lateris AD æquatur quadrato perpendicularis BD: ſimiliter quadratum lateris BC mulctatum quadrato lateris CD par eſt quadrato ejuſdem perpendicularis BD, hoc eſt

$$aa - \frac{cc+2ca-xx}{4} = bb - \frac{cc-2cx-xx}{4}$$

Ergo $x = \frac{bb-aa}{c}$.

Nempe ſi ex quadrato medii lateris BC ſubducatur quadratum lateris minoris BA, & reſiduum dividatur per latus majus AC, innoteſcet differentia ſegmentorum AD, DC.

Hæc differentia inventa ſi addatur majori lateri AC, ſumma hæc diviſa per 2 erit majus ſegmentum CD.

Hæc differentia inventa ſi ſubtrahatur ex majori latere AC, reſiduum diviſum per 2 erit minus ſegmentum DA.

Dempto deinde quadrato lateris AD ex quadrato lateris AB; vel ex quadrato lateris BC ſubducto quadrato lateris CD, radix quadrata reſidui erit perpendicularis BD, per cujus ſemiſſem ſi multiplicetur latus majus AC, habebitur area trianguli.

Si hæc æquatio $x = \frac{bb-aa}{c}$ reducatur ad proportionem, habebitur c.b+a::b−a.x: nimirum, ut majus latus eſt ad ſummam duorum minorum, ita differentia duorum minorum eſt ad differentiam ſegmentorum, quæ fiunt a perpendiculari, qua differentia inventa, reliqua fiunt ut ſupra.

Proportio hæc maximè eluceſcit in conſtructione geometrica.

ea. Nam (*fig.* 25. *T.* 19.) ſi ex puncto B tanquam centro, intervallo B A deſcribatur circulus E A G F, patet jam aliunde, lineam A C eſſe ad lineam C E, ut linea C F eſt ad lineam C G.

Sed cùm A B, B E ſint radii, linea C E æqualis eſt duabus lineis B C, B A; ſimiliter cùm B F, B A radii ſint, linea F C eſt differentia duarum linearum B C, B A.

Ex alia parte linea C G eſt differentia inter ſegmenta majus D C, & minus A D, ſive ipſi æquale D G; cùm perpendicularis B D, quæ per centrum tranſit, ſecet chordam A G in duas æquas partes.

Igitur ut majus latus A C eſt ad ſummam duorum minorum laterum B C, B A, ita differentia horum laterum minorum eſt ad differentiam ſegmentorum, quæ a perpendiculari fiunt.

In Numeris.

Sit triangulum 3, 4, 5. Ex quadrato lateris medii 4, quod eſt 16, dempto quadrato lateris minoris 3, quod eſt 9, reſiduum 7 diviſum per 5 exhibet $\frac{7}{5}$ pro differentia ſegmentorum, ſeu, quod idem eſt, fiat regula aurea 5. 7 :: 1. quar term., qui pariter eſt $\frac{7}{5}$: ut autem habeam ſegmentum minus, ſubduco $\frac{7}{5}$ ex 5, reſiduum eſt $\frac{18}{5}$; hujus ergo ſemiſſis $\frac{9}{5}$ eſt minus ſegmentum.

Ejus quadratum $\frac{81}{25}$ demptum ex quadrato numeri 3, quod eſt 9, ſeu $\frac{225}{25}$ relinquit $\frac{144}{25}$, cujus radix quadrata eſt $\frac{12}{5}$, quæ erit perpendicularis trianguli.

Semiſſis perpendicularis eſt fractio $\frac{6}{5}$, in quam ſi ducatur majus latus 5, provenient 6 pro trianguli area.

Uſus ſum hujuſmodi exemplo numerico ob majorem facilitatem; neque enim me latet, ut habeatur area trianguli rectanguli, cujuſmodi eſt 3, 4, 5, non niſi in ſe ducenda eſſe duo ejus minora latera, & producti accipiendam eſſe ſemiſſem, abſque eo quod fiat longus ille ſupradictus æquationis circuitus.

ALIUD

ALIUD PROBLEMA.

Archimedes prop. 16. ejus lib., qui de sphær., & cylind. inscribitur, multis demonstrat, superficiem cylindri, basibus demptis, æquari aræ circuli habentis radium lineam mediam proportionalem inter latus cylindri, & baseos diametrum.

En quomodo idipsum ostendi possit (*fig.* 26 & 27. *T* 19) Sit E A C F cylindrus habens basim circulum A B C D, cujus diameter est linea recta A C.

Ostensum est supra, cylindricam superficiem æquari circumferentiæ A B C D ductæ in altitudinem, seu latus A E.

Sit linea E A = a
H G = b
A C erit = $\frac{bb}{a}$; cùm linea H G ponatur media proportionalis inter lineas E A, & A C.

Ut habeatur circumferentia A B C D, fiat 7 . 22 : : $\frac{bb}{a}$, quar. term., qui erit $\frac{22bb}{7a}$; hic multiplicatus per a, ut habeas superficiem cylindricam, exhibet $\frac{22bb}{7}$.

Dein, ut habeatur area circuli, cujus radius est G H = b; fiat 7 . 22 : : 2 b. quar. term. qui erit $\frac{44b}{7}$ = circumferentiæ, hujus semis, scilicet $\frac{22b}{7}$, ducta in radium circuli G H = b producit circuli aream $\frac{22bb}{7}$ æqualem cylindricæ superficiei.

Non minori facilitate ostendi poterit propos. 17. ejusdem lib. quæ talis est: Superficies coni recti, basi dempta, par est aræ circuli, cujus radius est medius proportionalis inter latus coni, & baseos semidiametrum.

Sit (*fig.* 28, & 29. *T* 19.) conus rectus A B D C E, cujus basis est circulus B D C E, habens centrum in H, & semidiametrum lineam B H, sitque circulus F G, cujus radius G F supponitur medius proportionalis inter A B latus coni, & B H semidiametrum baseos.

Sit

Sit $AD = a$
$FG = b$
Ergo $BH = \frac{ab}{a}$.

Ex analogia coni ad pyramidem, ducta ſemicircumferentia BDCE in latus AB gignet productum æquale ſuperficiei coni. Ergo ſi fiat 7 . 22 :: $\frac{2bb}{a}$ quar. term., qui eſt $\frac{44bb}{7a}$, erit hic circumferentia circuli BDCE, cujus ſemis $\frac{22bb}{7a}$ ducta in latus $AB = a$ exhibet pro ſuperficie conica $\frac{22bb}{7}$.

Porro ut habeatur area circuli FG, cujus radius eſt $= b$, fiat 7 . 22 :: 2b . quar. term. ſcilicet $\frac{44b}{7}$, qui erit ejus circumferentia, cujus ſemiſſis $\frac{22b}{7}$ multiplicata per radium b dabit aream $\frac{22bb}{7}$, ideoque æqualem coni ſuperficiei.

Facili ulterius negocio demonſtrari poteſt etiam propoſit. 19 ejuſdem lib. quæ talis eſt.

Si conus rectus ADE (*fig.* 30, 31, 32. *T.* 19 & *fig.* 33. *T.* 20.) ſecetur plano BFC parallelo baſi DGE, ſuperficies portionis coni BDCE æquatur circulo, cujus radius eſt medius proportionalis inter lineam DB, & lineam æqualem duabus ſemidiametris baſium, hoc eſt lineis DG, BF ſimul ſumptis.

Sint duo circuli HZO, KPQ tales, ut radius HI primi ſit medius proportionalis inter AB, & BF; & radius KL ſecundi medius proportionalis inter AD, & DG. Per prop. præc. circulus quidem HZO æquabitur ſuperficiei conicæ ABC, circulus autem KPQ ſuperficiei conicæ ADE. Ergo ſuperficies conica BDCE erit æqualis areæ circuli KPQ multatæ areæ circuli HZO.

Sit
$AB = a$
$HI = b$
$BF = \frac{bb}{a}$ ex ſuppoſitione.
$AD = c$
$KL = d$
$DG = \frac{dd}{c}$ ex ſuppoſitione.
$DB = c - a$.

Itaque area circuli HZO erit $\frac{22bb}{7}$; area verò circuli KPQ

erit $\frac{2add}{7}$. Ergo ſuperficies conica BDCE erit $\frac{2add-2abb}{7}$.

Oſtendendum nunc tantùm eſt, aream alicujus circuli, puta RMY, qui ſupponitur habere radium medium proportionalem inter $c-\frac{bb}{a}$, & $\frac{dd}{c}-\frac{bb}{a}$, æquari ipſi $\frac{2add-2abb}{7}$.

Ad inveniendam mediam lineam proportionalem inter $c-\frac{bb}{a}$, & $\frac{dd}{c}-\frac{bb}{a}$, vel $\frac{dda-bbc}{ca}$, alterum in alterum terminum duco, & provenit $\frac{cadd-ccbb-ddaa+abbc}{ca}$, hoc eſt, $\frac{cadd-acbb}{ca}$, vel ſimpliciter $dd-bb$. Nam $\frac{ccbb}{ca}=\frac{ddaa}{aa}$; cùm eodem modo ſe habeat linea AB ad lineam BF, quo linea AD ad lineam DG, hoc eſt, $a.\frac{bb}{a}::c.\frac{dd}{c}$; ex quo ſequitur extremorum productum $\frac{add}{c}$ producto mediorum $\frac{bbc}{a}$ æquari.

Itaque media proportionalis quæſita eſt $\sqrt{dd-bb}$, quæ debet eſſe radius circuli RYM.

Ut habeatur circumferentia, fiat $7.44::\sqrt{dd-bb}.$ quart. term., & habebitur pro circumferentia $\sqrt{\frac{1936dd-1936bb}{49}}$, quæ ducta in radium $\sqrt{dd-bb}$ exhibet productum $\sqrt{\frac{1936ddd-1936bbd-1936bbd+1936bbb}{49}}$, vel $\frac{44d-44bb}{7}$ duplum areæ. Quare area circuli RYM eſt $\frac{2add-2abb}{7}$. Quod erat oſtendendum.

Hæ tres propoſitiones, & præſertim ultima, ſuccurrunt, aperiuntque viam ad mirabilem illam methodum, qua uſus eſt Archimedes in demonſtranda proportione ſphæræ, & cylindri. Hoc certè quidem & præſtantia, ea quæ ſubtiliter ab humano ingenio excogitata ſunt, & utilitate eâ omnia, quæ ad Geometriam ſpectant, longè antecellit. Sed verſimile videtur, inſignem illum virum via parum a ſupra tradita diſſimili uſum eſſe ad illa invenienda, ſuamque celare voluiſſe artem, ut major inde oriretur admiratio. Nullo pene modo fieri potuiſſe videtur, ut Ille ſine aliqua ratione noſtræ analyſi affini potuerit aſſequi ſine ullo prorſus errore ordinem ita compoſitum, cujuſmodi eſt, quem

quem proponit. Qui in Antiquorum ſcriptis legendis verſati ſunt, quique mentem ſuam ſubtilibus Geometriæ ſpeculationibus aſſuefecerunt, ſexcentis in locis, quæ a nobis hùc recenſita ſunt, offendunt, atque obſervant; ita ut vulgaris Geometræ eſſe videatur, analyticæ ſcientiæ gloriam Antiquis denegare vel noſtra majorem, vel certè æqualem.

Datis duabus lineis (*fig.* 34. *Tab.* 20) rectis A B, C D ſe ad rectos ſecantibus in puncto D æquè ab extremitatibus A, & B diſtante, deſcribere quandam ovalem, ut C K ω B, quæ habeat punctum D tanquam centrum, lineam A B tanquam majorem axem, & lineam C D tanquam ſemiſſem minoris axis; ejuſque ſit naturæ, ut ſi ex aliquo ejus puncto, ut ω, ducantur ad focos f, F lineæ ω f, ω F, rectangulum harum duarum linearum æquetur rectangulo duarum aliarum quarumcunque linearum, quæ pariter ducantur a quovis alio curvæ puncto ad focos, cujuſmodi ſunt in figura lineæ K f, K F.

Ad hoc in primis conſidero, cùm puncta A, & C ſint duo curvæ puncta, rectangulum linearum A f, A F æquari debere rectangulo linearum C F, C f, hoc eſt lineam A f eam debere rationem habere ad lineam C f, quam eadem C f, ſeu ipſi æqualis C F habet ad A F; ideoque quæſtio eo tendit, ut inveniatur punctum f.

Sit C D = a
A D = b
A f = x
f D = b − x
A F = 2 b − x; ſiquidem duo foci f, & F determinant æqualitatem linearum A f, B F.

Linea f C erit $\sqrt{aa + bb - 2bx + xx}$; nam cùm angulus in D rectus ſit, quadratum hypotenuſæ f C par eſt quadratis laterum f D, & D C.

Sed ex ſuppoſita hujuſce curvæ natura, x. $\sqrt{aa+bb-2bx+xx}$ :: $\sqrt{aa+bb-2bx+xx}$. 2b − x.

Igitur extremorum producto productum mediorum æquatur, hoc eſt 2 b x − xx = aa + bb − 2 b x + xx. quare xx = 2 b x − aa − bb, & conſequenter x = b − $\frac{\sqrt{bb-aa}}{2}$.

Ex quo colligitur, ſi ex linea A D auferatur linea, quæ æquetur ipſi

$\sqrt{\frac{bb-aa}{a}}$, reſiduam eſſe lineam A f.

Super linea A D ſumpta tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus A G D. Ex puncto D accipiatur linea D G par ipſi D C; jungatque puncta A, & G linea A M G, quæ producatur in I, donec linea I A ſemis ſit lineæ A G, tandem ſuper linea I G tanquam diametro accepta deſcribatur alter ſemicirculus I L G: dico, lineam A L perpendiculariter erectam ſupra lineam I G ex puncto A, & peripheria I L G terminatam æquari ipſi $\sqrt{\frac{bb-aa}{a}}$.

Nam cùm triangulum A G D ſit rectangulum, quadratum lateris A G deficit a quadrato hypotenuſæ A D quadrato lateris D G, hoc eſt, quadratum lateris A G eſt bb — aa: ulterius cùm lineæ A G, A L, A I ſint ex conſtructione continuè proportionales, quadratum lineæ A G eſt ad quadratum lineæ A L, ut linea A G ad lineam A I: ſed linea A G ex hypotheſi dupla eſt lineæ A I. Ergo quadratum lineæ A G duplum eſt quadrati lineæ A L. Quod cùm ita ſit, cùm quadratum lineæ A G ſit bb — aa, quadratum lineæ A L erit $\frac{bb-aa}{2}$; ideoque linea A L erit $\sqrt{\frac{bb-aa}{2}}$.

Itaque, ſicut linea A D diminuta linea D f, quæ par ſit ipſi A L, relinquit lineam A f, quæ determinat focum f, qui inveniendus proponebatur; ita eadem ratione habebitur alter focus F, qui tam debet diſtare a puncto B, quàm alter focus f diſtat a puncto A.

Quibus peractis, facillima redditur Curvæ deſcriptio: nam ſi ductis lineis F C, f C, ex foco F tanquam centro, & intervallo majori quidem, quàm linea F B, minori verò, quàm linea F C, puta F S, deſcribatur circulus S ω, & ex alio foco f deſcribatur alter circulus Q ω habens radium lineam f Q, quæ ſit ad lineam C F, ut eadem C F eſt ad F S; hi duo circuli ſe ſecabunt in aliquo puncto, ut ω, quod erit unum punctorum lineæ curvæ quæſitæ.

Ex conſtructione enim ω F æquabitur ipſi F S, & ω f ipſi Q f; ſed ob eandem conſtructionem F S eſt ad F C, ut F C ad f Q. Quare F ω eſt ad F C, ut F C, ſeu ipſi æqualis C f ad ω f. Igitur rectangulum ſub lineis ω F, ω f ductis ex puncto ω ad duos focos æqua-

æquale eſt rectangulo ſub aliis duabus lineis C F, C f. Non diſſimili ratione reperietur quodvis aliud punctum, ut K, ſi deſcribatur circulus R K ex centro F, & circulus P K ex centro f; ita ut radius circuli R K ſit ad lineam C F, ut eadem C F ad radium circuli F K.

Hujuſmodi lineam curvam Caſſinoidem vocamus, denominatione ſumpta ab ejus celebri inventore Caſſino, Regii Obſervatorii Præfecto, cujus mirus eſt uſus in explicandis Planetarum motibus.

Facile oſtendere eſt, curvam hanc uno gradu altiorem eſſe, quàm ſint conicæ ſectiones; æquatio enim, quæ exprimit relationem applicatæ ω Φ ad ſuam interceptam B Φ aſcendit ad quadrato-quadratum, quod tamen ad cubum reduci poteſt, imo & ipſa curva deſcribi poteſt motu ſectionis conicæ, & lineæ rectæ, ſecundum methodum inſignis Carteſii.

Ecce tibi nonnullas alias hujus lineæ proprietates.

Si ex puncto H extremitate minoris axis ducatur ad majoris axis extremitatem B linea H B, hæc erit media proportionalis inter lineam f B, & duas lineas A f, F B ſimul ſumptas.

Ponatur nunc D B = d
A f = b
F B = b

Cùm namque linea D F æquetur ipſi d − b, ejus quadratum erit dd − 2db + bb, cui ſi addatur quadratum lineæ C D, quod eſt a a, habebitur quadratum lineæ C F = d d − 2 d b + bb + aa: ſed idem quadratum lineæ C F eſt etiam = 2 d b − b b. Igitur 4 d b − 2 b b = d d + a a.

Hæc æqualitas ad proportionem redacta exhibet 2 d − b. $\sqrt{dd+aa}$ :: $\sqrt{dd+aa}$. 2 b.

Atqui ob triangulum H D B rectangulum linea H B eſt = $\sqrt{dd+aa}$. Quare illa eſt media proportionalis inter f B, & duas lineas A f, F B.

Dico ulterius, quadratum lineæ H B duplo majus eſſe quadrato lineæ H F, ſeu F C ipſi æqualis.

Oſtenſum jam eſt, lineam D F parem eſſe lineæ A L, quæ proinde erit $\frac{\sqrt{dd-aa}}{2}$, ſi A D ponatur = d. Ergo quadratum lineæ D F eſt $\frac{dd-aa}{4}$, cui ſi addatur quadratum lineæ C D, quod eſt

aa, habebitur $\frac{dd+aa}{2}$ æquale quadrato lineæ F C, quod per conſequens erit ſemis quadrati lineæ H B, quod eſt dd + aa.

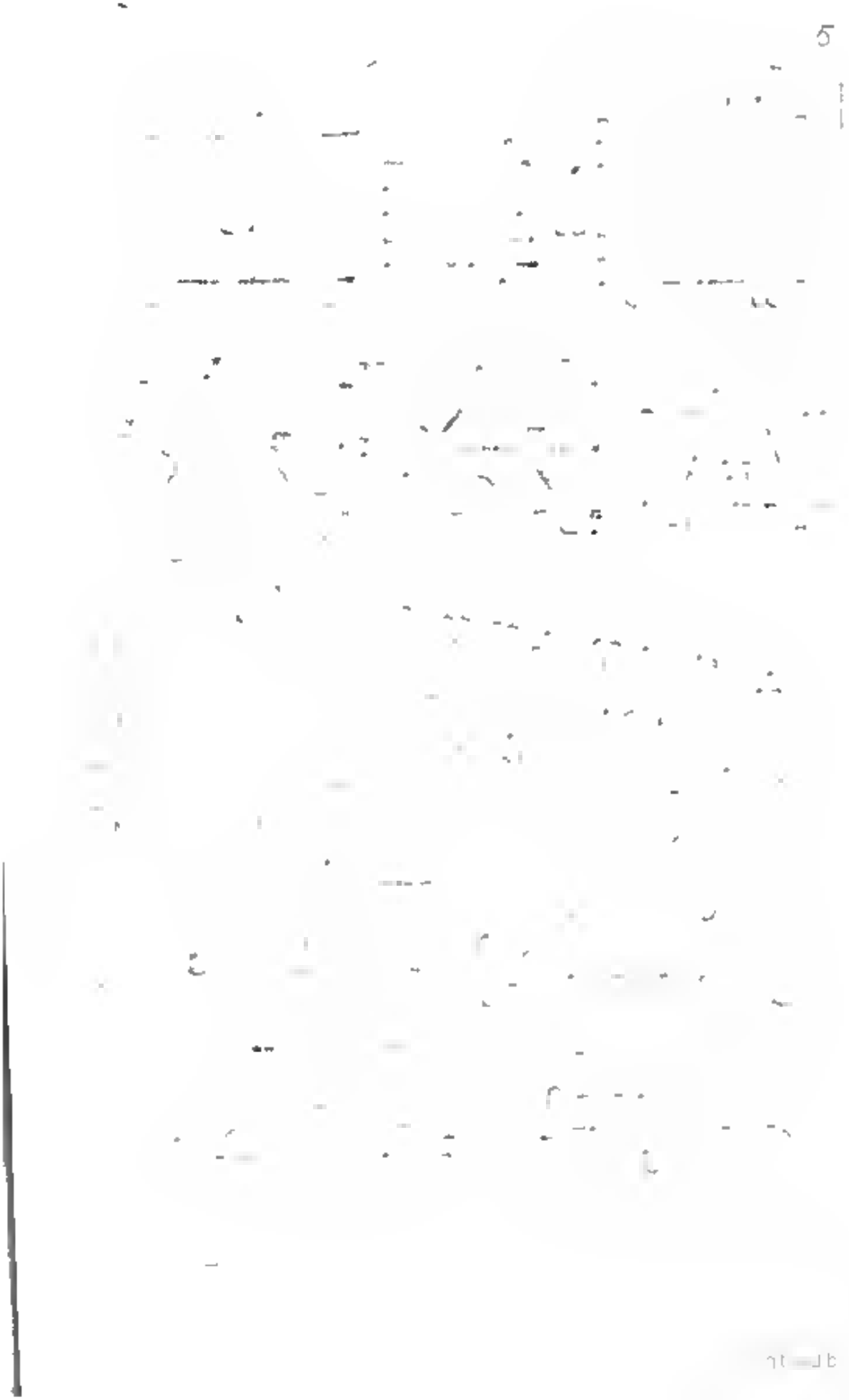
Hoc inſuper ſuppeditat modum perfacilem inveniendi focorum Curvæ: Ad hoc ſiquidem ſat eſt, producere lineam B H uſque in ϰ, ita ut H ϰ ſit ſemiſſis ipſius H B; ſumpta deinde B ϰ tanquam diametro, deſcriptoque ſuper ea ſemicirculo ϰ & B, erigatur ex puncto H perpendicularis H & uſque ad peripheriam. Hæc linea erit $\sqrt{\frac{dd+aa}{2}}$; ideoque æqualis ipſi H F. Quare circulus deſcriptus ex centro H, intervallo H & ſecabit lineam D B in puncto F altero focorum Curvæ.

FINIS.

Digitized by Google

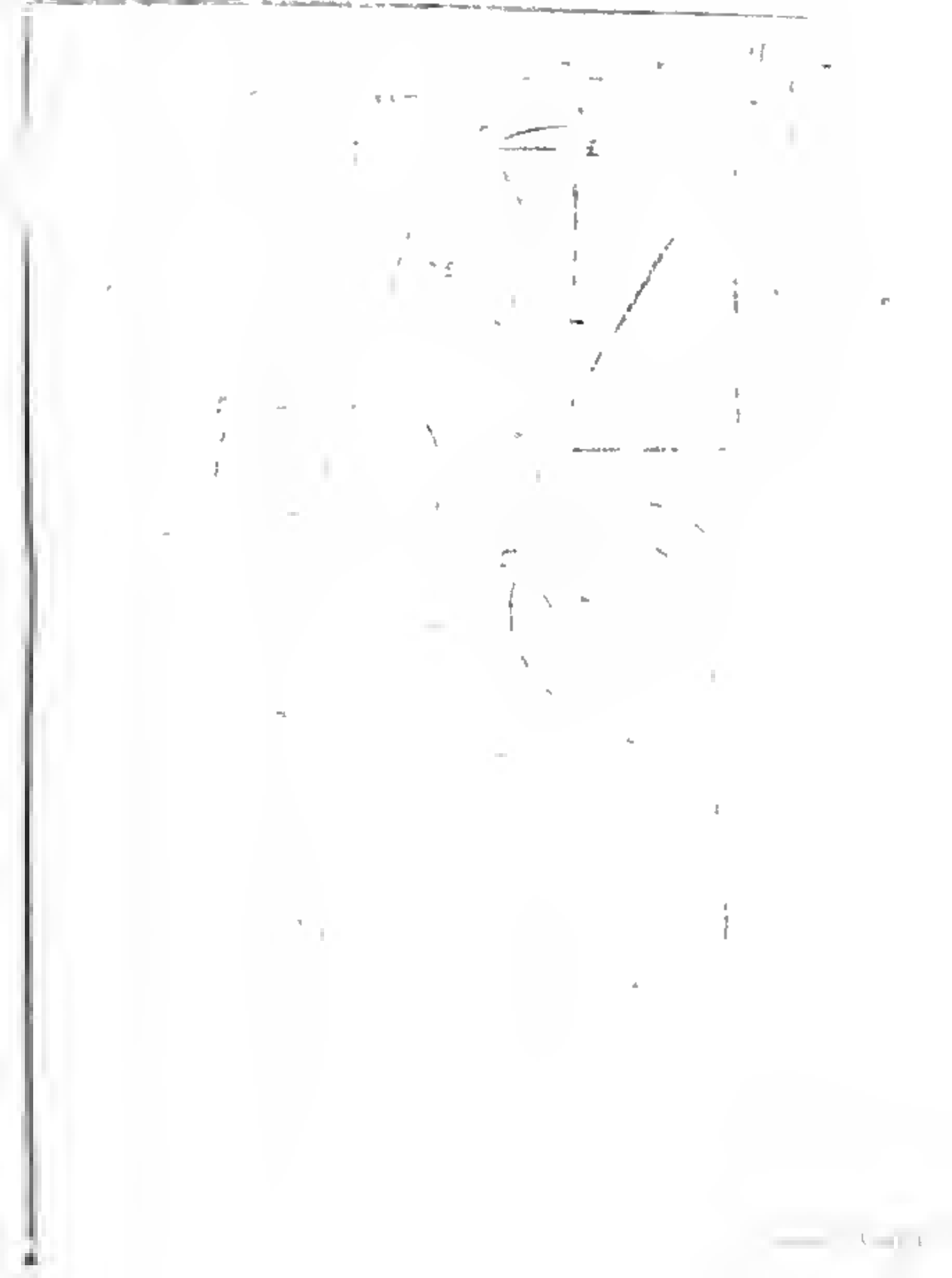
3-3-239

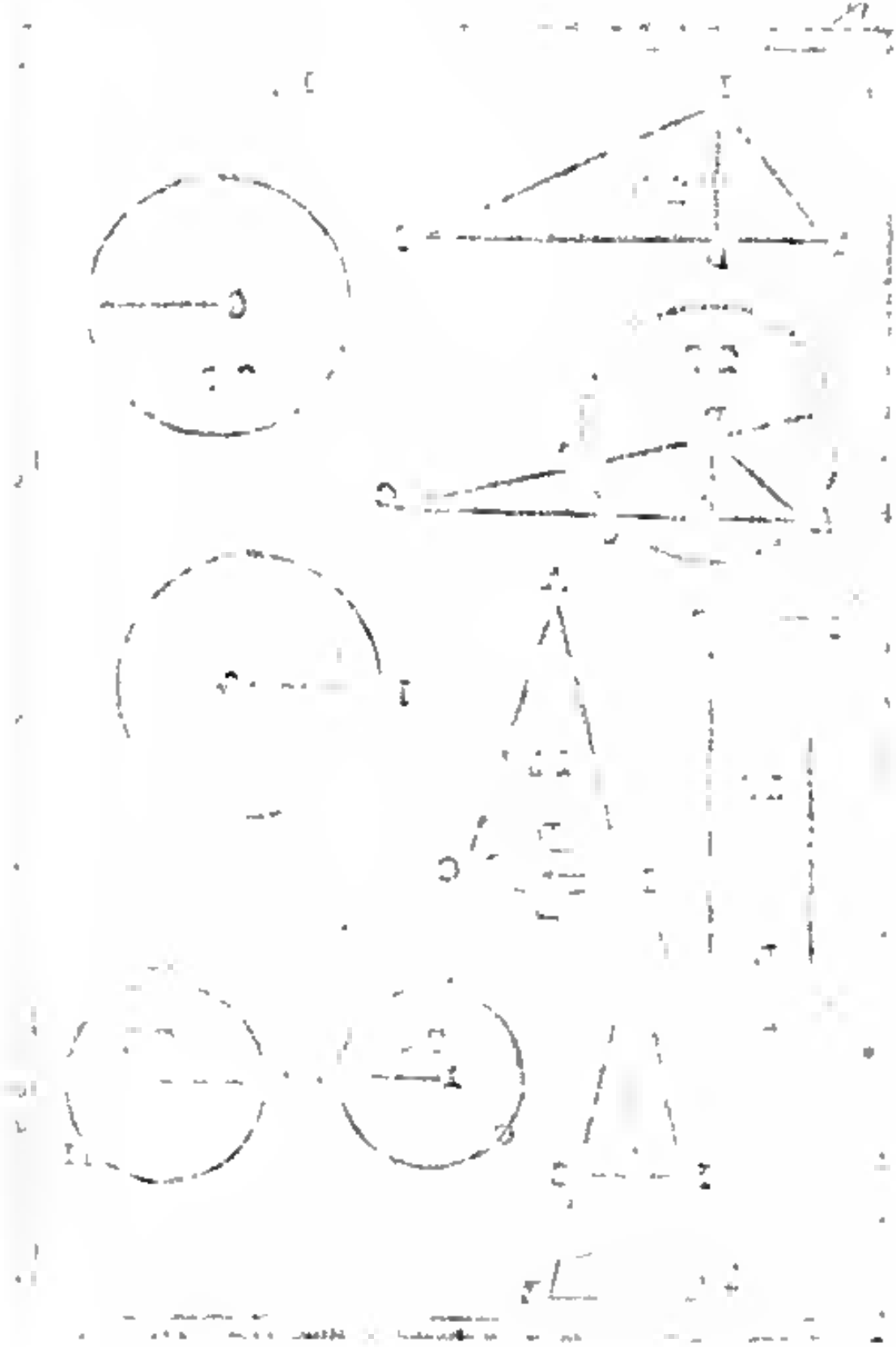
Digitized by Google

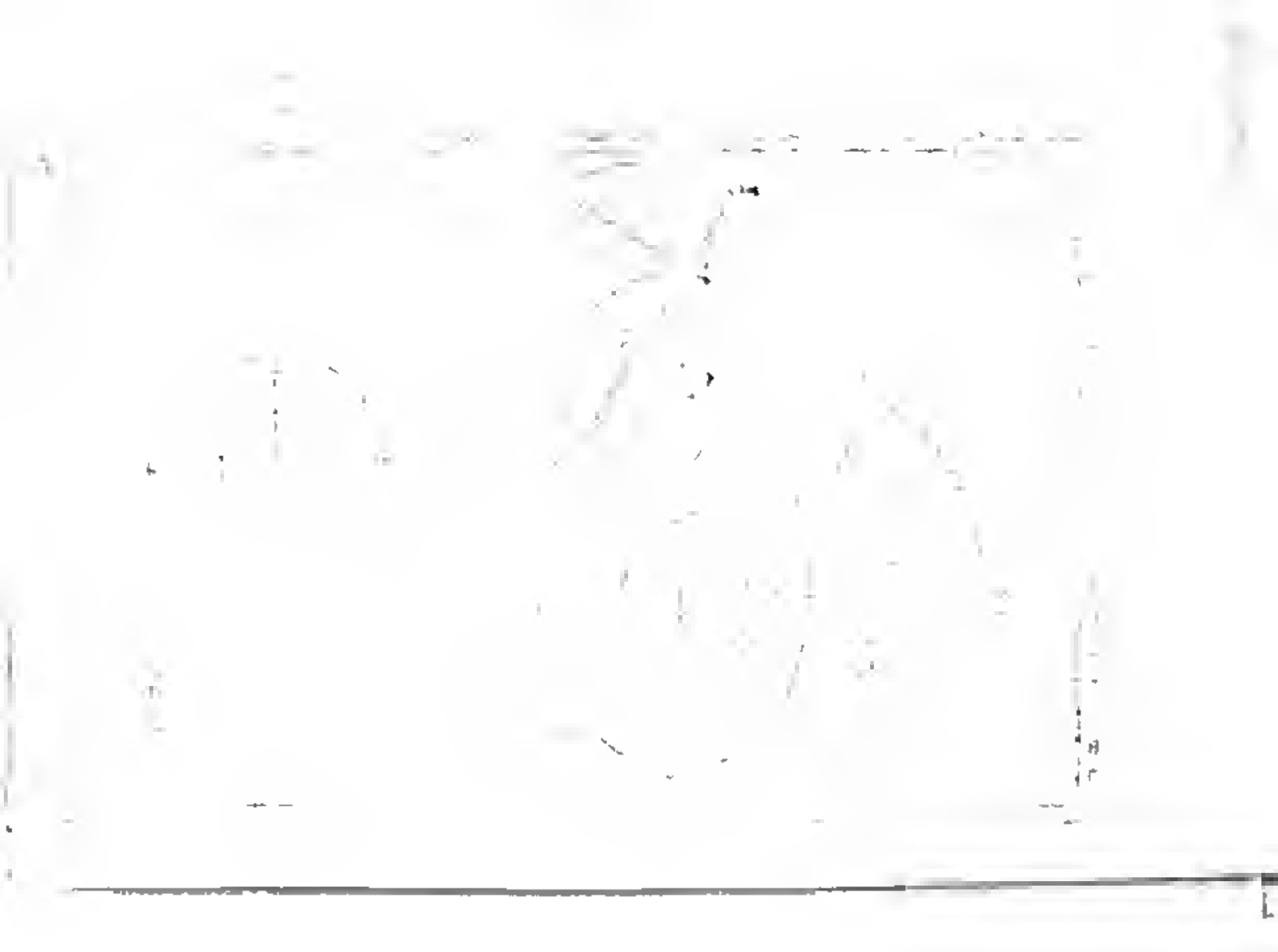


gitized by Google

Digitized by Google







Digitized by

005663259